

Bài 9

MẶT CONG



NỘI DUNG

1. Các khái niệm
2. Biểu diễn mặt cong
3. Mô hình hóa mặt cong

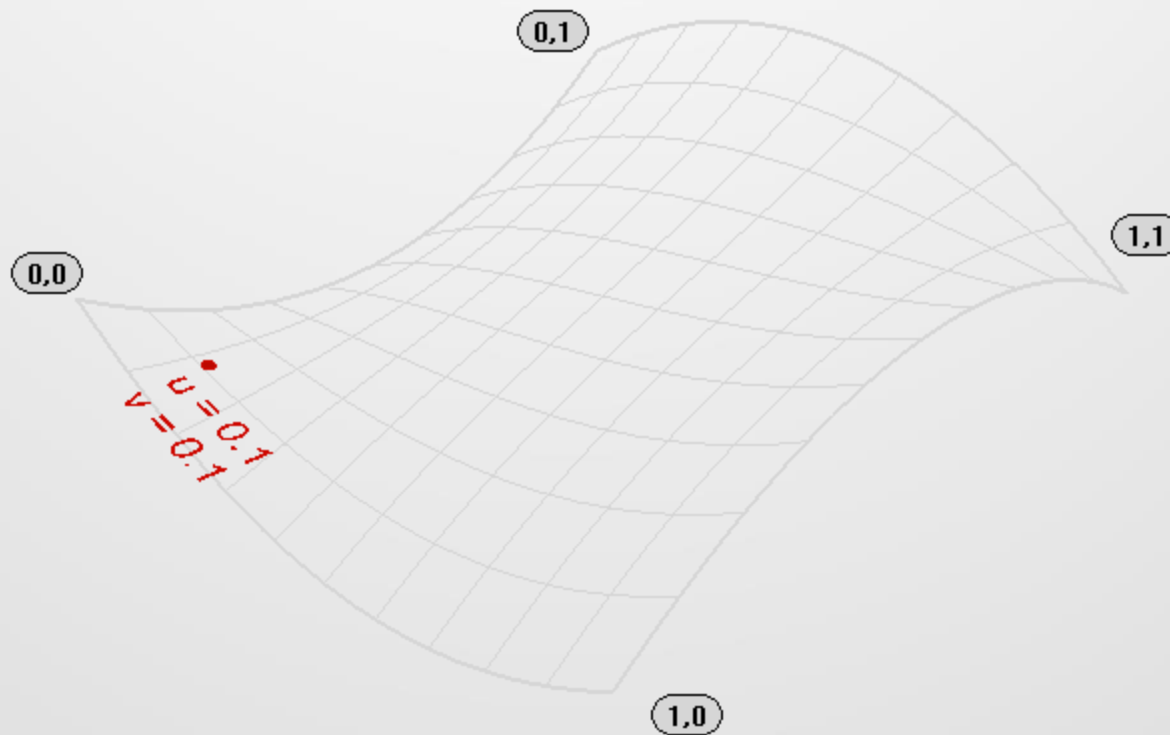


1

KHÁI NIỆM

Các khái niệm cơ bản

- Mặt cong – Surface: Là quỹ đạo chuyển động của 1 đường cong tạo nên



Biểu diễn mặt cong

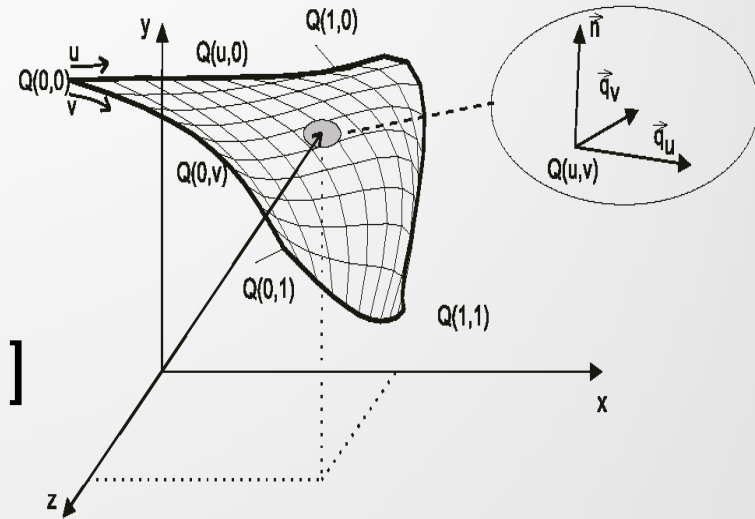
- Biểu diễn tham biến cho mặt cong
 - Dựa vào việc xây dựng và tạo bề mặt toán học trên những điểm dữ liệu
 - Dựa trên việc xây dựng nên bề mặt phụ thuộc vào biến số có khả năng thay đổi một cách trực diện thông qua các tương tác đồ hoạ.
- Biểu diễn theo mảnh
 - Biểu diễn miếng tứ giác - quadrilatera Patches
 - Biểu diễn miếng tam giác - Triangular Patches
 - $x=x(u,v,w)$ $u,v,w \in [0, 1]$
 - $y=y(u,v,w)$ $u + v + w = 1$
 - $z=z(u,v,w)$
 - $Q(u,v,w) = Q[x=x(u,v,w) \ y=y(u,v,w) \ z=z(u,v,w)]$

Biểu diễn dùng mặt lưới

- Cho phép phân tích sớm và dễ dàng các đặc tính của bề mặt, đường cong của bề mặt và tính chất vật lý của bề mặt.
- Cho phép xác định diện tích, xác định vùng của bề mặt hay các môment của mặt.
- Với khả năng tô màu bề mặt trong thực tế cho phép việc kiểm tra thiết kế đơn giản.
- Tạo ra các thông tin cần thiết cho việc sản xuất và tạo ra bề mặt như code điều khiển số được dễ dàng thuận tiện hơn nhiều so với các phương pháp thiết kế cổ điển

Biểu diễn mảnh tứ giác

- Phương trình
- $x=x(u,v)$
- $y=y(u,v)$ $u,v \in [0, 1]$
- $z=z(u,v)$
- $Q(u,v) = Q[x=x(u,v) \ y=y(u,v) \ z=z(u,v)]$
- Thành phần
 - u,v là các tham biến
 - Các điểm $Q(0,0)$ $Q(0,1)$, $Q(1,0)$, $Q(1,1)$ là cận của mảnh
 - Các đường cong $Q(1,v)$, $Q(0,v)$, $Q(u,0)$, $Q(u,1)$ là các biên của mảnh
 - Đạo hàm riêng tại điểm $Q(u,v)$ xác định vector tiếp tuyến theo hướng u, v

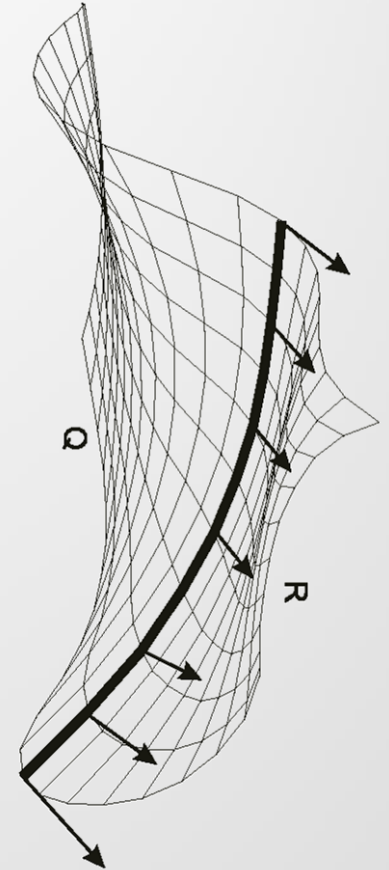


$$\frac{\partial Q(u,v)}{\partial u} = Q[\frac{\partial x(u,v)}{\partial u}, \frac{\partial y(u,v)}{\partial u}, \frac{\partial z(u,v)}{\partial u}]$$

$$\frac{\partial Q(u,v)}{\partial v} = Q[\frac{\partial x(u,v)}{\partial v}, \frac{\partial y(u,v)}{\partial v}, \frac{\partial z(u,v)}{\partial v}]$$

Kết nối mảnh tứ giác

- Thực thể hình học biểu diễn thông qua các mảnh cùng dạng
- Các mảnh có thể nối với nhau theo các hướng u, v khi 2 mảnh cùng hướng đó
- Nếu mọi điểm trên biên của 2 mảnh = nhau, hay 2 biên = nhau. 2 mảnh liên tục bậc C_0
- Nếu 2 biên = nhau và đạo hàm bằng nhau trên cùng 1 hướng thì 2 mảnh gọi là kết nối bậc C_1



Hệ tọa độ Barycentric

- Tập các điểm $P_1, P_2 \dots P_n$
- Tập các tổ hợp của các điểm đó

$$k_1 P_1 + k_2 P_2 + k_3 P_3 \dots + k_n P_n$$

Với

$$k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_n = 1$$

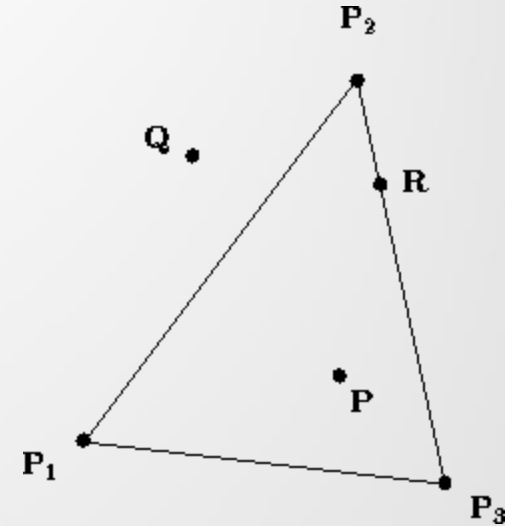
- Các điểm tạo thành không gian affine với các giá trị tọa độ barycentric

$$k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$$

được gọi là hệ tọa độ barycentric.

Tam giác

- Trong tam giác các điểm có dạng P_1, P_2, P_3
- Hệ số: $k_1, k_2, k_3 \in [0, 1]$
- $k_1 + k_2 + k_3 = 1$
- $P = k_1P_1 + k_2P_2 + k_3P_3$
- Nếu Hệ số $k_i > 1$ hoặc < 0 điểm P sẽ nằm ngoài tam giác Q
- Nếu Hệ số $k_i = 1$ hoặc $= 0$ điểm P sẽ nằm trên cạnh tam giác



Bi-Linear

- Là mặt nội suy từ 4 điểm P_{00} ; P_{01} ; P_{10} ; P_{11} trong không gian

Với $(u,v) [0; 1] [0; 1]$

$$P(u,v) = (1 - u)(1 - v)P_{00} + (1 - u)vP_{01} + u(1 - v)P_{10} + uvP_{11}$$

- Dùng để mô tả các đối tượng có hình dạng tứ giác như cờ, khăn ...
- Mở rộng cho các đối tượng cùng loại



2

MÔ HÌNH HÓA MẶT CONG

Mô hình hóa mặt cong

- Ruled Surface
- Coon-Boolean Sum
- Surface of Revolution
- Swept Surface Extrusion

Ruled Surface

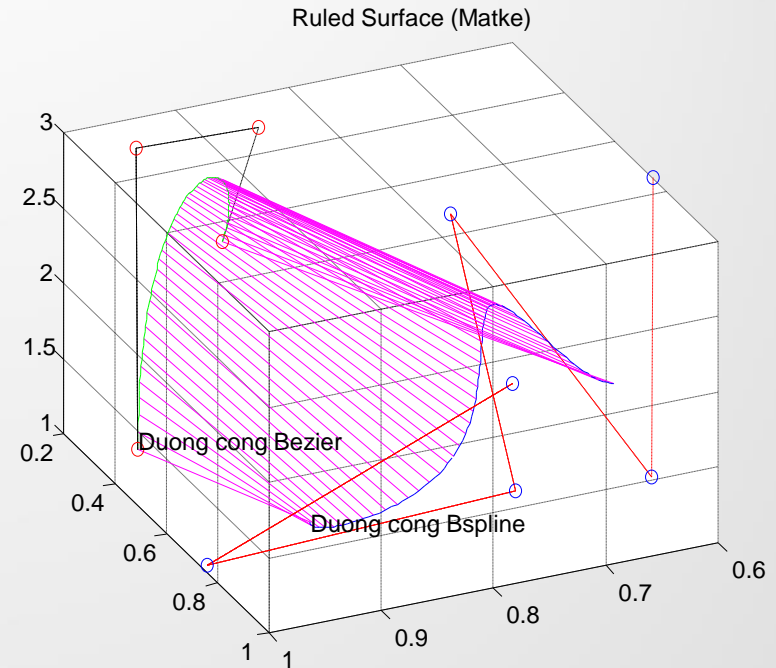
- Bề mặt được xây dựng bằng cách cho trượt 1 đoạn thẳng trên 2 đường cong
- Các mặt kẻ nhận được bằng phép nội suy tuyến tính từ hai đường cong biên cho trước tương ứng với hai biên đối diện của mặt kẻ $P1(u)$ và $P2(u)$

Phương trình mặt kẻ:

$$Q(u,v) = P2(u)v + P1(u)(1-v)$$

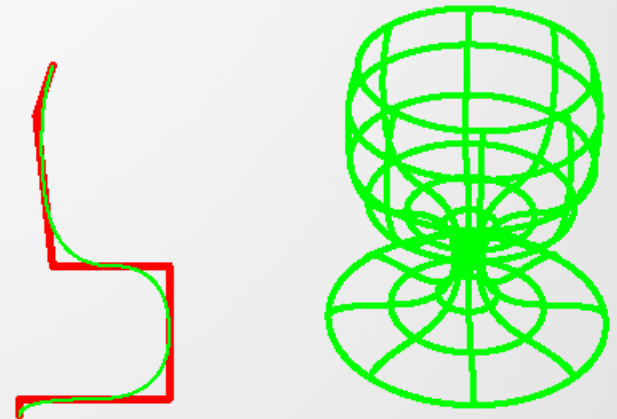
Nếu hai đường cong cho trước tương ứng là $P1(v)$ và $P2(v)$ thì mặt kẻ có phương trình

$$Q(u,v) = P1(v)(1-u) + P2(v)u = [(1 - u) \quad u] \begin{bmatrix} P1(v) \\ P2(v) \end{bmatrix}$$



Mặt tròn xoay

- Mặt được xây dựng bởi đường thẳng hay 1 đường cong phẳng, quanh một trục trong không gian



- Giả sử đường cong phẳng có dạng
$$P(t)=[x(t) \ y(t) \ z(t)] \quad 0 \leq t \leq t_{\max}$$
- Ví dụ: quay quanh trục x một thực thể nằm trên mặt phẳng xy, phương trình bề mặt là
$$Q(t, \phi) = [x(t) \ y(t) \cos\phi \ z(t) \sin\phi] \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi$$

Ví dụ mặt tròn xoay

- $P1[1 \ 1 \ 0]$ và $P2[6 \ 2 \ 0]$ nằm trong mặt phẳng xy . Quay đường thẳng quanh trục x sẽ được một mặt nón. Xác định điểm của mặt tại $t=0.5$, $\phi = \pi/3$.

- Phương trình tham số cho đoạn thẳng từ $P1$ tới $P2$ là:

$$P(t) = [x(t) \ y(t) \ z(t)] = P1 + (P2 - P1)t \quad 0 \leq t \leq 1$$

với các thành phần Đề-các:

$$x(t) = x1 + (x2 - x1)t = 1 + 5t$$

$$y(t) = y1 + (y2 - y1)t = 1 + t$$

$$z(t) = z1 + (z2 - z1)t = 0$$

- Dùng phương trình

$$Q(1/2, \pi/3) = [1 + 5t \ (1 + t)\cos\phi \ (1 + t)\sin\phi]$$

$$= \left[\frac{7}{2} \quad \frac{3}{2} \cos \frac{\pi}{3} \quad \frac{3}{2} \sin \frac{\pi}{3} \right]$$

$$= \left[\frac{7}{2} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{3\sqrt{3}}{4} \right]$$

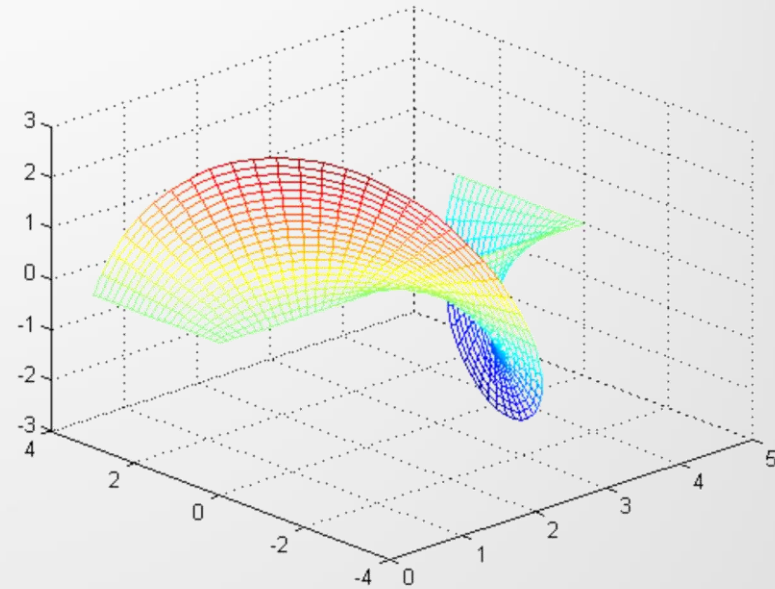
Mặt trượt - swept surface

- Sweep surface là mặt được tạo bởi bằng cách trượt một thực thể, ví dụ: một đường thẳng, đa giác, một đường cong, một hình... dọc theo một đường trong không gian.
- $Q(u,v) = P(u) * [T(v)]$
- $P(u)$ thực thể cần trượt
- $[T(v)]$ là ma trận biến đổi ($[T(v)]$ có thể là ma trận tịnh tiến, quay, hay tỉ lệ ... hoặc là kết hợp của nhiều phép biến đổi đó)
- Ví dụ:

$$P1[0 \ 0 \ 0], P2[0 \ 3 \ 0].$$

$$P(t) = P1 + (P2 - P1) * u = [0 \ 3u \ 0 \ 1]$$

$$0 \leq u, v \leq 1$$



$$|T(v)| = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\pi v) & \sin(2\pi v) & 0 \\ 0 & -\sin(2\pi v) & \cos(2\pi v) & 0 \\ 10v & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ví dụ về mặt sweep extrusion

- Hình vuông xác định bởi 4 đỉnh :

$$P1[0 \ -1 \ 0], P2[0 \ -1 \ -1],$$

$$P3[0 \ 1 \ -1], P4[0 \ 1 \ 1]$$

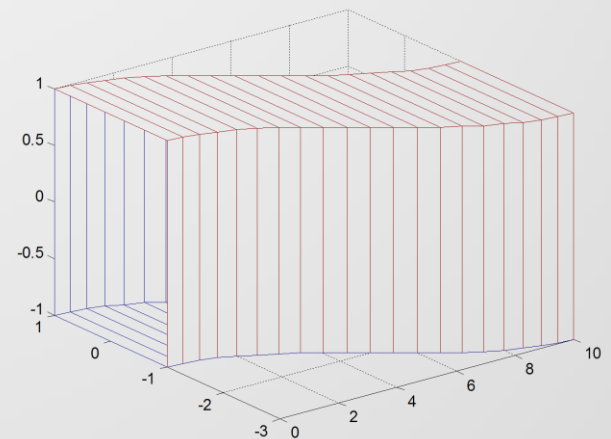
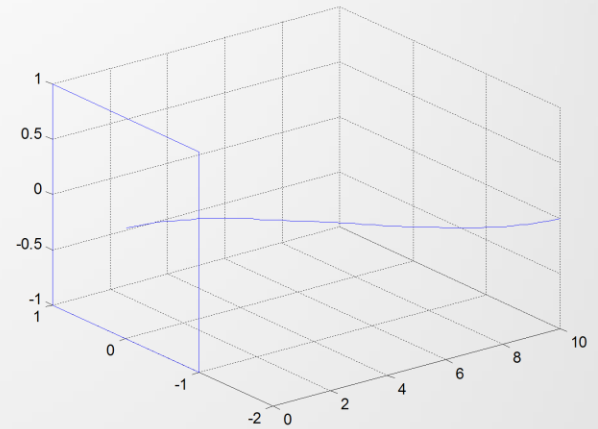
- Đường cong trượt

$$x = 10v \quad y = \cos(\Pi v) - 1$$

$$|P(u)| = \begin{bmatrix} P1 \\ P2 \\ P3 \\ P4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad |T(v)| = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 10v & \cos(\Pi v) - 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Quay 1 góc khi trượt

$$\begin{bmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 10v & \cos(\Pi v) - 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Boolean sum cool surface

Mặt được xây dựng trên 4 điểm và các đường cong biên

$S(u,v)$ Mặt nội suy trên 4 đường biên

$$S(u; v) = S1(u, v) + S2(u, v) - P(u; v)$$

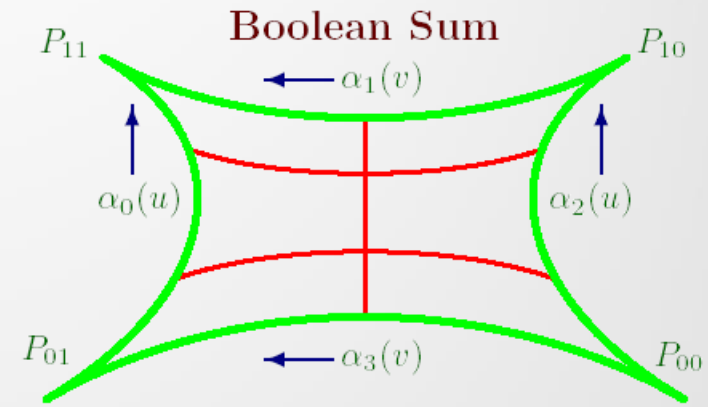
Với:

$$P(u,v) = (1-u)(1-v)P_{00} + (1-u)vP_{01} + u(1-v)P_{10} + uvP_{11}$$

$$S1(u,v) = vA0(u) + (1-v)A2(u)$$

$$S2(u; v) = uA1(v) + (1-u)A3(v);$$

- P là các đỉnh của mảnh 4
- $A_i(u)$ là các phương trình đường biên



Ví dụ boolean sum surface

Với $u = 0$

$$S(0,v) = S1(0,v) + S2(0,v) - P(0, v)$$

$$= v A0(0) + (1 - v)A2(0) + 0 A1(v)$$

$$+ 1 A3(v) - (1 - v)P00 - v P01$$

$$= v P01 + (1 - v)P00 + A3(v) - (1 - v)P00 - v P01$$

$$= A3(v)$$



3

XÂY DỰNG MẶT CÔNG TỪ ĐƯỜNG CÔNG

LO DOOMO COMO

Xây dựng mặt cong từ đường cong

- Hermite
- Bezier
- B-Spline

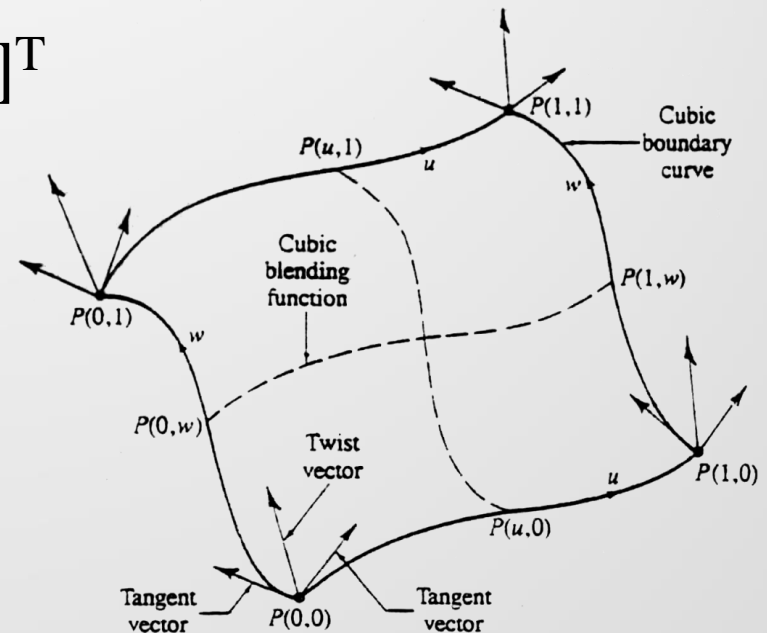
Mặt cong bậc ba Hermite

$$Q(u, v) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 C_{ij} u^i v^j \quad 0 \leq u, v \leq 1$$

$$Q(u, v) = [U][C][V]^T \quad 0 \leq u, v < 1$$

$$Q(u, v) = [U][M_H][B][M_H]^T[V]^T$$

$$[M_H] = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

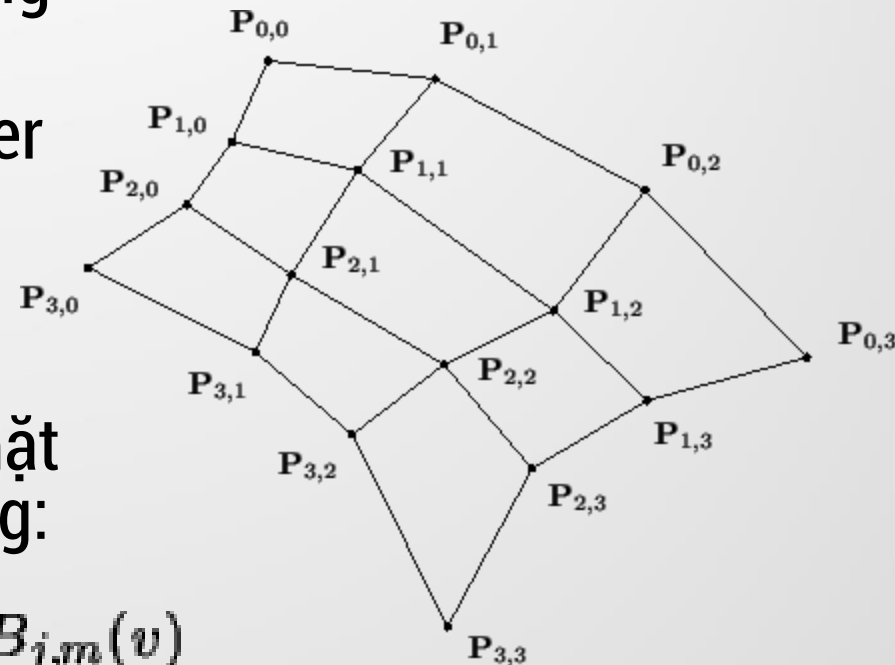


Mảnh-patch Bézier

- Mô hình dạng tổng quát
- Mảnh Bezier được hình thành trên phép trượt của đường cong Bezier.
- Việc xây dựng nên mảnh Bezier dưới các điểm kiểm soát, tạo nên đa diện kiểm soát $\{P_{i,j} : 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m\}$
- Phương trình tổng quát của mặt cong tham biến Bezier có dạng:

$$P(u, v) = \sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^n P_{i,j} B_{i,n}(u) B_{j,m}(v)$$

- $u, v \in [0, 1]$



Mảnh Bezier bậc 3

- Mặt cong Bezier bậc 3 là mặt phổ biến nhất trong CG, vì đi độ đơn giản của nó
- Hình thành trên 4x4 điểm kiểm soát

- Công thức có dạng

$$Q(u, v) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 B_{n,i}(u) B_{m,j}(v) P_{ij}$$

- Đa thức Bernstein có dạng:

$$B_0(t) = (1-t)^3$$

$$B_1(t) = 3t(1-t)^2$$

$$B_2(t) = 3t^2(1-t)$$

$$B_3(t) = t^3$$

Tính chất của mảnh Bézier

- Tính bao lồi: Mặt cong Bezier luôn nằm trong đa diện lồi của các điểm kiểm soát
- Mặt cong đi qua 4 điểm cận $P_{00}, P_{01}, P_{10}, P_{11}$ hay chính xác
$$Q(0,0)=P_{00}, Q(0,1)=P_{01},$$
$$Q(1,0)=P_{10}, Q(1,1)=P_{11}$$
- Đường cong biên của Mặt Bezier là đường cong Bezier
- Mặt cong là liên tục và đạo hàm riêng các bậc tồn tại của nó cũng liên tục.
- Đạo hàm riêng của mặt cong có dạng:
$$\frac{\partial Q(0,0)}{\partial u} = 3(P_{01} - P_{00})$$
$$\frac{\partial Q(0,0)}{\partial v} = 3(P_{10} - P_{00})$$
$$\frac{\partial Q(0,1)}{\partial u} = 3(P_{03} - P_{02})$$
$$\frac{\partial Q(1,0)}{\partial v} = 3(P_{13} - P_{03})$$

- $Q(u,v)$ là mọi điểm nằm trên mặt cong và

$$Q(u,v) = [U] [N] [B] [M]^T [V]^T$$

$$[V] = [v^3 \quad v^2 \quad v \quad 1]$$

$$[U] = [u^3 \quad u^2 \quad u \quad 1]$$

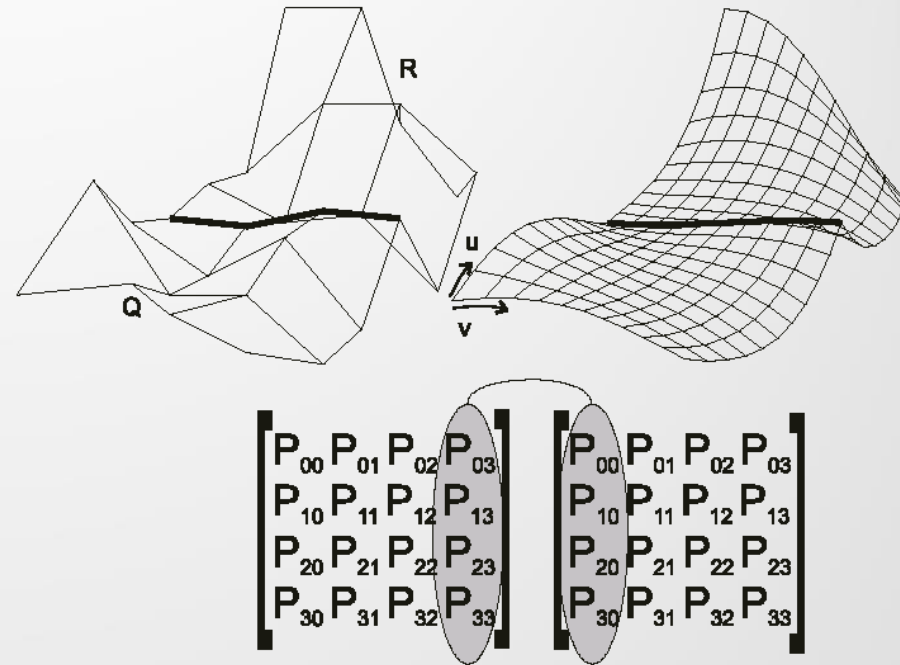
$[N]$ và $[M]$ được biểu diễn =

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q(u,v) = \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} & B_{02} & B_{03} \\ B_{10} & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{20} & B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{30} & B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^3 \\ v^2 \\ v \\ 1 \end{bmatrix}$$

Nối 2 miếng Bezier bậc 3

- Hai mảnh Q và R cùng chung tham biến tại biên (Giả sử u)
- Hai đường cong biên phải bằng nhau $Q(1,v)=R(0,v)$
- Hệ số của cột cuối ma trận Q = cột đầu ma trận R
- Tương tự: Nếu theo hướng của v thì hàng sẽ thay cột ma trận



- Bậc của mặt cong theo mỗi hướng của tham biến bằng số điểm kiểm soát trừ 1.
- Tính liên tục hay đạo hàm của mặt theo mỗi tham biến bằng số điểm kiểm soát trừ 2.
- Hình dạng của mặt biến đổi theo các cạnh của đa giác kiểm soát.
- Mặt lưới chỉ đi qua các điểm góc cạnh của đa giác kiểm soát.
- Mặt lưới chỉ nằm trong phần giới hạn bởi lưới của đa giác lỗi kiểm soát.
- Mặt lưới không thay đổi dưới tác động của các phép biến đổi affine.
- Mỗi đường biên của mặt Bezier là 1 đường cong Bezier với mặt cong bậc ba Bezier các đường cong biên luôn đảm bảo là các đường Bezier bậc 3.
- Như vậy lưới đa giác cho bề mặt sẽ là 4×4

Đánh giá mặt cong bezier

- Ưu điểm
 - Dễ trong xây dựng chương trình
 - Dễ trong render
 - Là mặt cong mạnh biểu diễn được nhiều hình phức tạp
- Nhược điểm
 - Không thể mô tả được hình cầu
 - Điều kiện để nối 2 mặt cong cần rất nhiều điểm. Dẫn đến mất khả năng điều khiển

Mặt cong B-spline

- Phương trình mặt B-spline
- P_{ij} là điểm kiểm soát
- N và M là đa thức B-spline
- Với các mặt cong mở mặt cong phụ thuộc vào các knot vector

$$Q(u, w) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_{i,k}(u) \cdot M_{j,h}(w) \cdot P_{i,j}$$

$$N_{i,k}(u) = \begin{cases} 1 & x_i \leq u < x_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$N_{i,k}(u) = \frac{(u - x_i)N_{i,k-1}(u)}{x_{i+k-1} - x_i} + \frac{(x_{i+k} - u) \cdot N_{i+1,k-1}(u)}{x_{i+k} - x_{i+1}}$$

$$\begin{cases} x_i = 0 (1 \leq i \leq k) \\ x_i = i - k (k + 1 \leq i \leq n) \\ x_i = n - k + 1 (n + 1 \leq i \leq n + k) \end{cases}$$

Đặc điểm của mặt cong B-spline

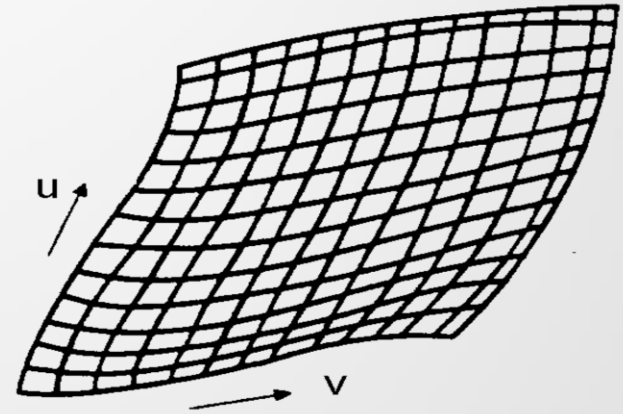
- Số bậc cao nhất của bề mặt theo mỗi hướng thì bằng số điểm kiểm soát - 1 theo hướng đó.
- Đạo hàm riêng của phương trình bề mặt theo mỗi tham biến có bậc bằng số điểm kiểm soát theo tham biến đó trừ 2.
- Bề mặt B-spline thì không chịu ảnh hưởng của phép biến đổi affine. Bề mặt sẽ thay đổi nếu ta thay đổi đa giác kiểm soát.
- Ảnh hưởng của một điểm kiểm soát đơn được giới hạn bởi $\pm k/2$ khoảng đối với mỗi tham số.

Đặc điểm của mặt cong B-spline (tiếp)

- Nếu số đỉnh của đa giác kiểm soát bằng số bậc theo mỗi tham biến và không có điểm kép nào thì mặt B-spline sẽ chuyển thành mặt Bezier.
- Nếu các đa giác kiểm soát có dạng tam giác thì lưới đa giác kiểm soát sẽ có hình dáng gần giống với bề mặt cong.
- Mỗi mặt B-Spline luôn nằm trong bao lồi của đa giác kiểm soát .
- Mỗi mặt B-Spline có dáng điệu luôn bám theo hình dáng của đa giác kiểm soát.

Mặt cong tham biến bậc 3

- Dựa vào việc xây dựng và tạo bề mặt toán học trên những điểm dữ liệu
- Dựa trên việc xây dựng nên bề mặt phụ thuộc vào biến số có khả năng thay đổi một cách trực diện thông qua các tương tác đồ hoạ.



$$Q(u, v) = [x \ y \ z]$$
$$= [x(u, v) \ y(u, v) \ z(u, v)]$$
$$u_{\min} \leq u \leq u_{\max}, \ v_{\min} \leq v \leq v_{\max}$$

Đặc điểm mặt cong tham biến bậc 3

- Bậc cao nhất của mặt theo mỗi hướng bằng số điểm kiểm soát -1 theo hướng đó
- Đạo hàm riêng của phương trình bề mặt theo một hướng có bậc bằng số điểm kiểm soát -2.
- Mặt B.spline không thay đổi dưới tác động của các phép biến đổi affine
- Nếu số điểm kiểm soát bằng số bậc của mặt cong cộng 1 thì mặt B-spline chuyển dạng Bezier.