Bài 8

ĐƯỜNG CONG

Trịnh Thành Trung
trungtt@soict.hust.edu.vn

NỘI DUNG

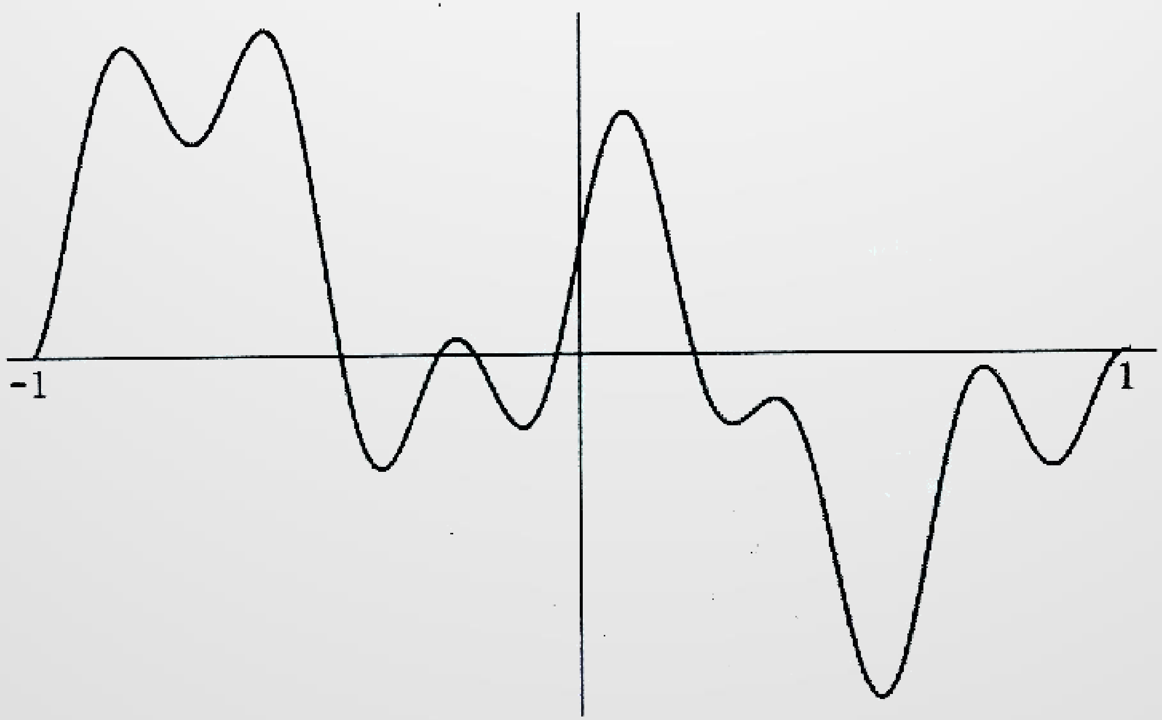
1. Các khái niệm
2. Phân loại
3. Đường cong đa thức bậc 3
4. Đường cong Spline

1

KHÁI NIỆM

Đường cong

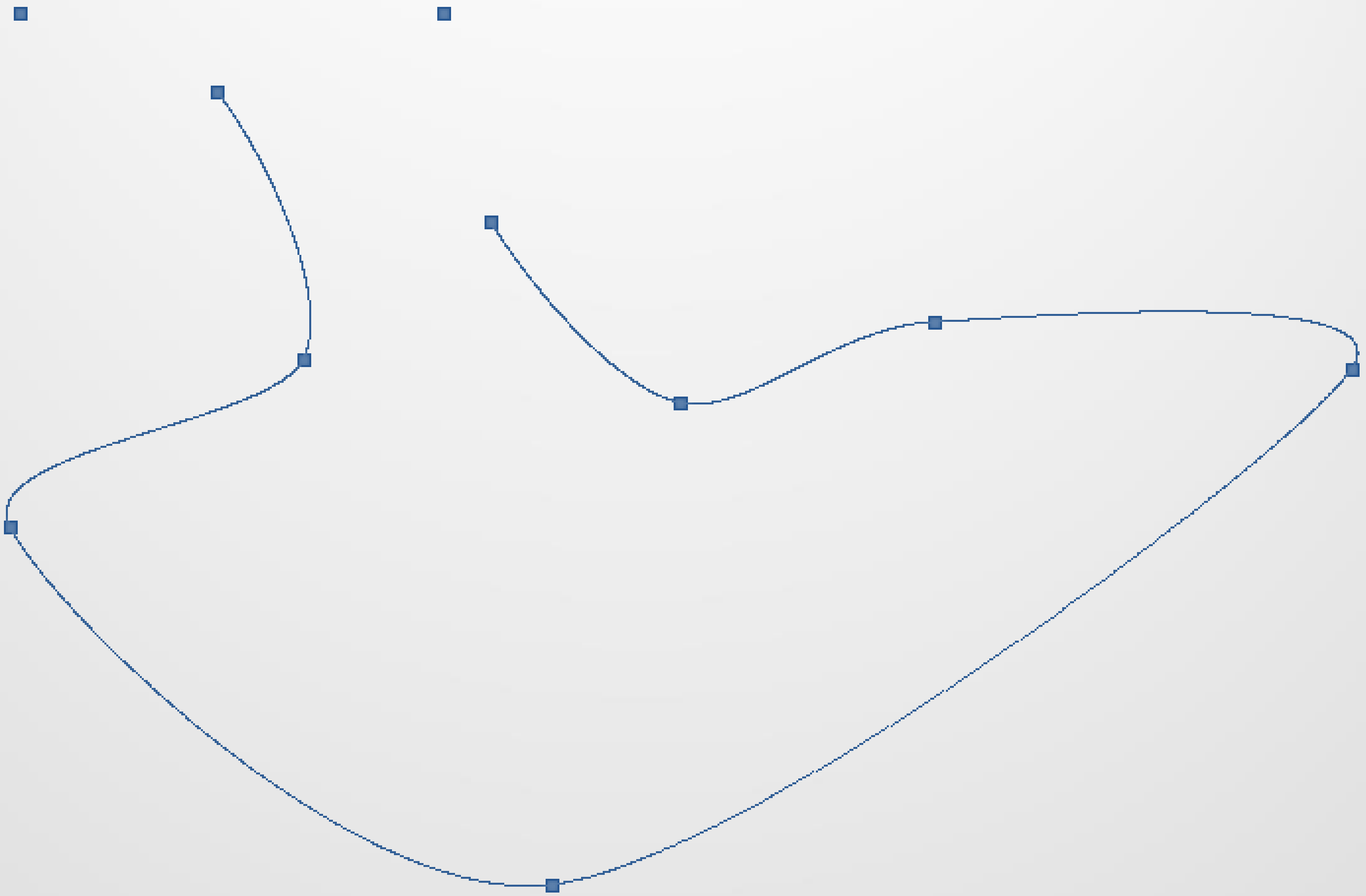
- Đường cong – Curve:
  - Quỹ đạo chuyển động của 1 điểm trong không gian



Điểm biểu diễn đường cong

- **Điểm biểu diễn đường cong - curve represents points:**
  - Là phương pháp được sử dụng trong khoa học vật lý và kỹ nghệ nói chung.
  - Các điểm dữ liệu được đo chính xác trên các thực thể sẽ chính đối tượng cơ sở. Đường cong đi qua các điểm dữ liệu hiển thị hỗ trợ cho việc nhận ra xu hướng và ý nghĩa cả các điểm dữ liệu.
  - Các kỹ thuật phức tạp (VD: bình phương sai số) được dùng đưa đường cong hợp với 1 dạng toán học cơ bản.

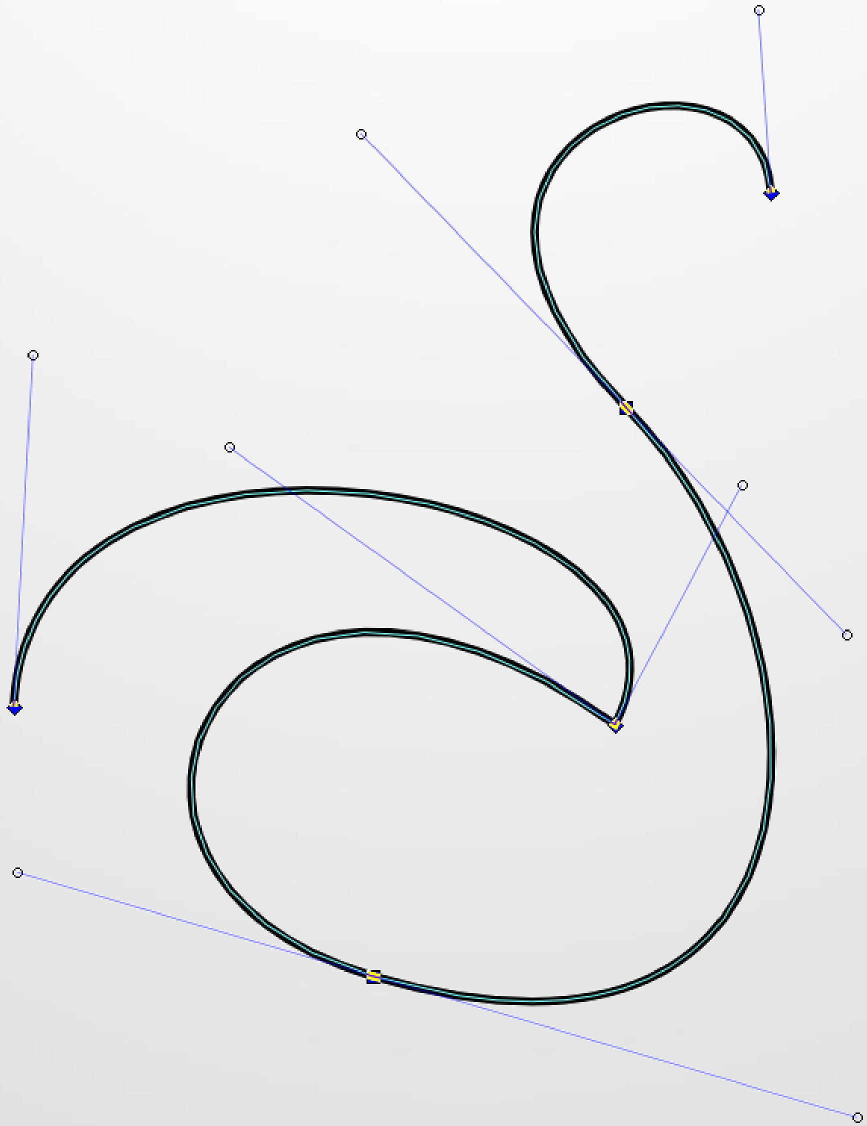
Điểm biểu diễn đường cong



Biểu diễn điểm và kiểm soát đường cong

- **Biểu diễn điểm và kiểm soát đường cong - Points represent and control curve.**
  – Đường cong là các đối tượng cơ bản thường là kết quả của tiến trình thiết kế và các điểm đóng vai trò là công cụ để kiểm soát và và mô hình hoá đường cong.
  – Là cơ sở của lĩnh vực Computer Aided Geometric Design (CAGD).

Biểu diễn điểm và kiểm soát đường cong



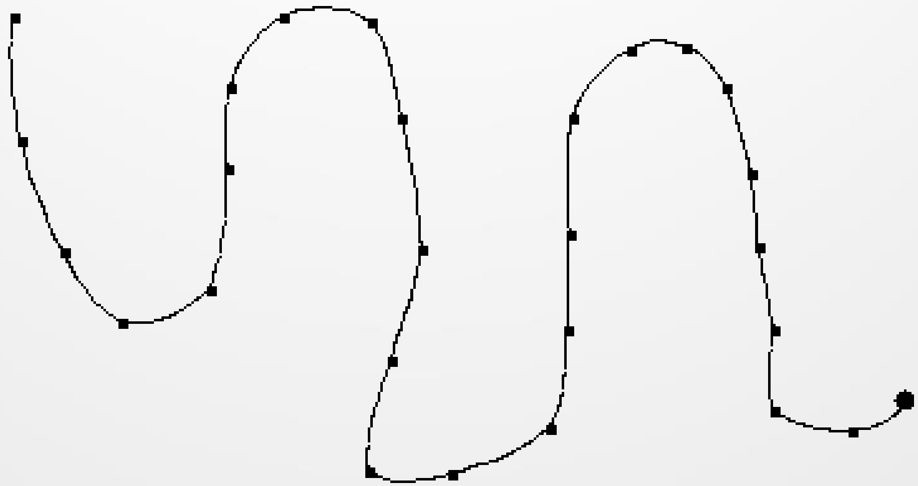
2

PHÂN LOẠI

Nội suy

- Nội suy- Interpolation: đường cong đi qua các điểm, trong ứng dụng khoa học các yêu cầu về ràng buộc sử dụng đa thức hay các hàm bậc cao tuy nhiên kết quả thường có những hiệu ứng phụ như sai số phóng đại hay độ nhấp nhô của đường cong do đa thức bậc cao tạo nên.

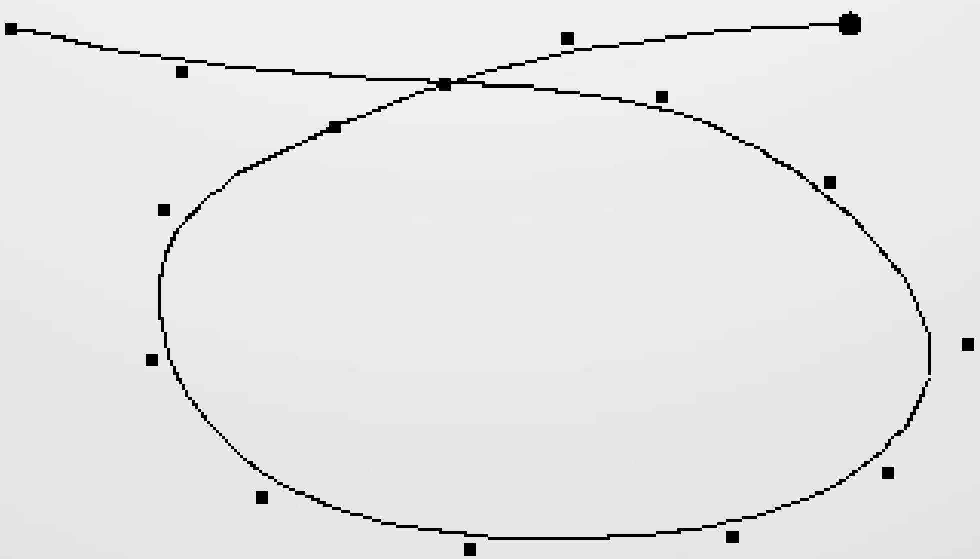
Nội suy



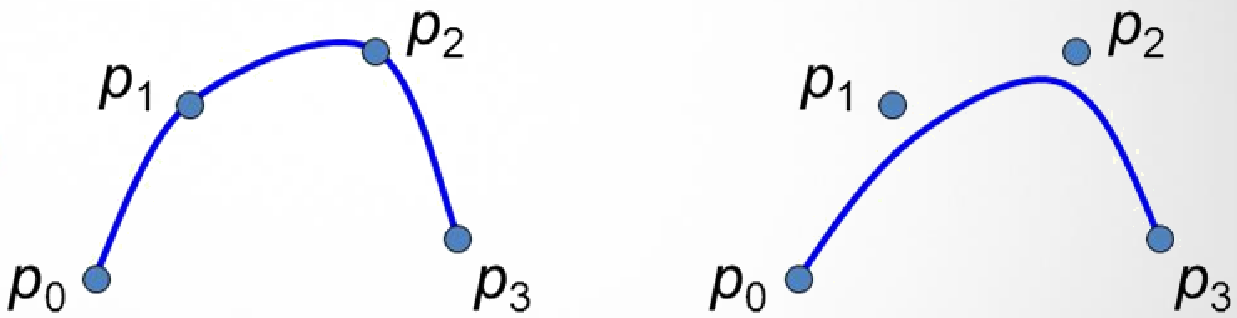
– Trong thiết kế nôi suy là cần thiết với các đối tượng nhưng không phù hợp với các đối tượng có hình dáng bất kỳ "free form“.

Xấp xỉ

- Xấp xỉ - Approximation: đường cong không cần đi qua các điểm,với các ứng dụng khoa học ta gọi là trung bình dữ liệu- data averaging hay trong thiết kế điều khiển đường cong.



NỘI SUY VS. XẤP XỈ



3

ĐƯỜNG CONG BẬC 3

Đường cong đa thức bậc ba

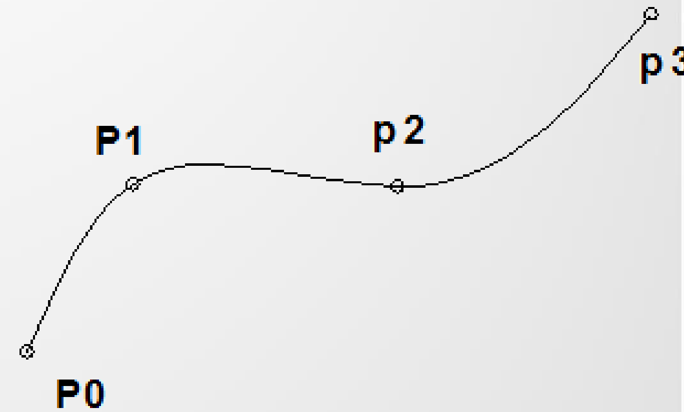
- Là đường cong không gian với 3 trục toạ độ x, y, z
- Tránh được những tính toán phức tạp và những phần nhấp nhô ngoài ý muốn xuất hiện ở những đường đa thức bậc cao

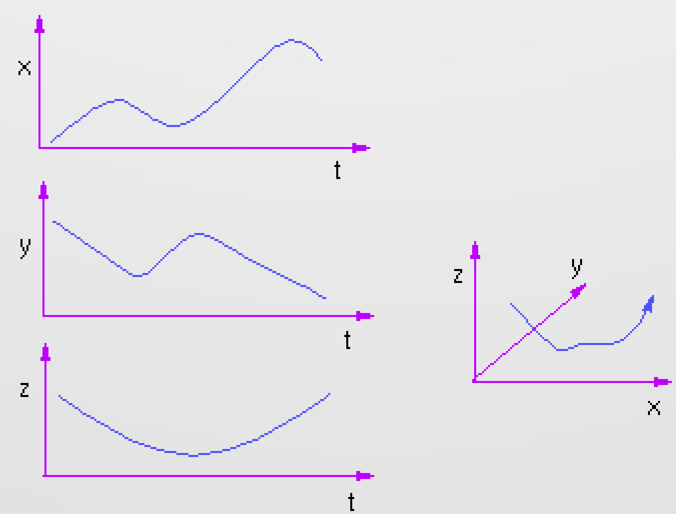
Tính chất

- *Tham biến – parametric* sử dụng tham biến ngoài để biểu diễn cho các tham biến trong
- *Độ mượt - smooth.* Với đường cong Hermite and Bézier tính liên tục continuity của đường cong hay đạo hàm bậc 1-first derivative tại các điểm kiểm soát-control point. Với B-splines tính liên tục trên đạo hàm bậc 2 second derivative hay độ cong được đảm bảo curvature.
- *Độ biến đổi - variation diminishing.* đường cong ít bị khuếch đại sai số bởi các điểm kiểm soát hay tính nhấp nhô của đường cong hạn chế -oscillate.
- *Điểm kiểm soát cục bộ-local control.* đường cong bị ảnh hưởng mạnh nhất với chính các điểm kiểm soát gần chúng nhất.

Đường cong LeGrange

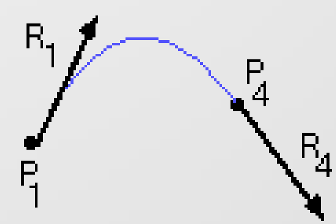
- Theo LeGrange:
  - $x = a_1 + b_1u + c_1u^2 + d_1u^3$
  - $y = a_2 + b_2u + c_2u^2 + d_2u^3$
  - $z = a_3 + b_3u + c_3u^2 + d_3u^3$
- 3 phương trình   với 12 ẩn số
- Với 4 điểm P_0, P_1, P_2, P_3 phương trình xác định

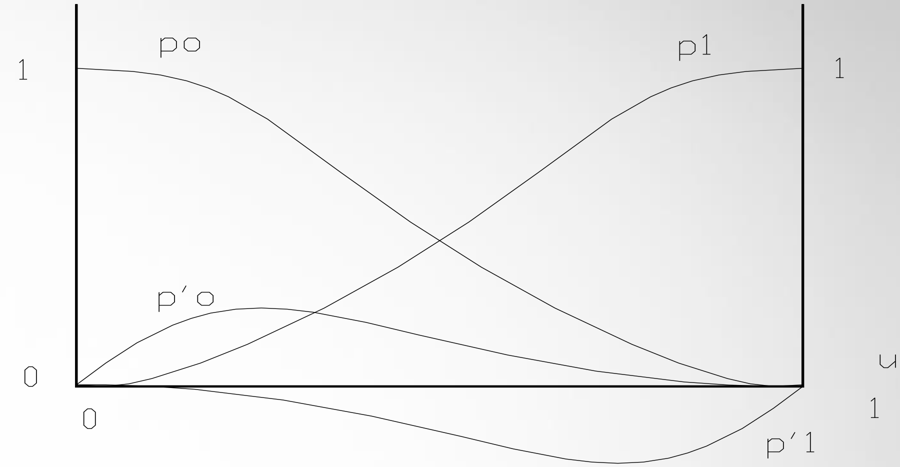




Đường cong Hermite

- Phương pháp Hermite dựa trên cơ sở của cách biểu diễn Ferguson hay Coons năm 60
- Đường bậc ba sẽ xác định bởi hai điểm đầu và cuối cùng với hai góc nghiêng tại hai điểm đó
  - $p = p(u) = k_0 + k_1u + k_2u^2 + k_3u^3$
  - $p(u) = \sum k_i u^i \quad i \in n$
  - $p' = p'(u) = k_1 + 2k_2u + 3k_3u^2$
- p_0 và p_1 ta có hai độ dốc p_0' và p_1' với u = 0 và u = 1 tại hai điểm đầu cuối của đoạn [0,1].
  - $k_1 + 2k_2 + 3k_3 = p1'$
  - $k_0 = p_0 \quad k_1 = p_1'$
  - $k_2 = 3(p_1 - p_0) - 2p_0' - p_1'$
  - $k_3 = 2(p_0 - p_1) + p_0' + p_1'$



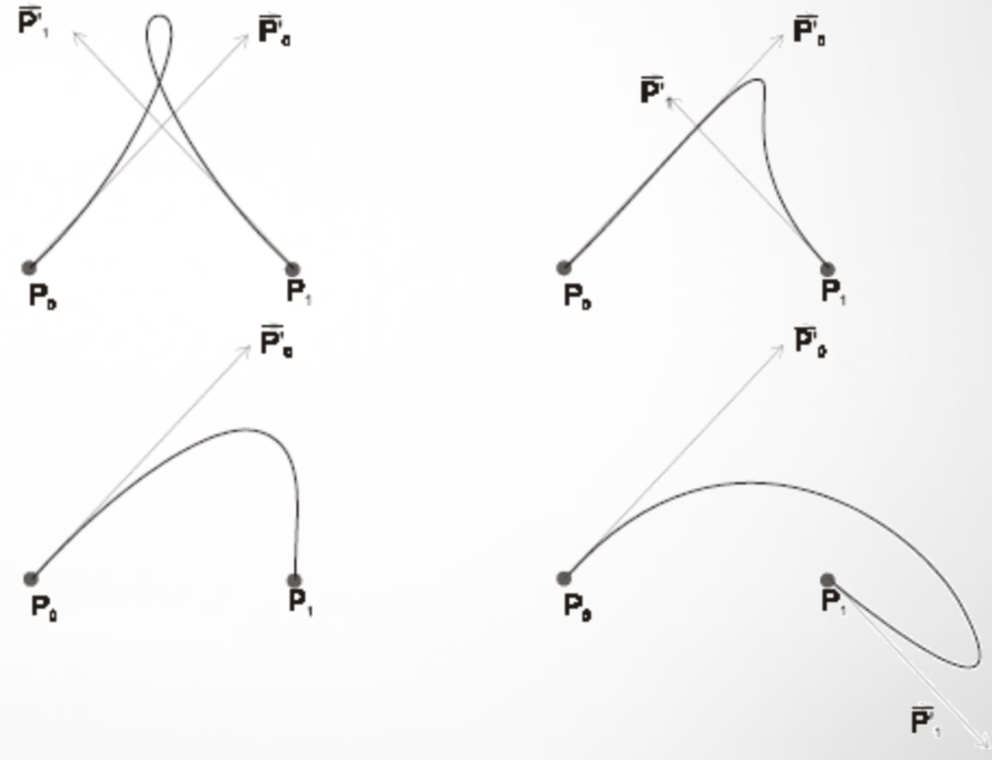


Thay vào:

- $p = p(u) = p_0(1-3u^2+2u^3) + p_1(3u^2-2u^3)$
$+ p_0'(u-2u^2+u^3) + p_1'(-u^2+u^3)$

$$p = p(u) = [\ 1\ u\ u^2\ \ u^3\ ] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p'_0 \\ p'_1 \end{bmatrix}$$

VÍ DỤ ĐƯỜNG CONG HERMITE

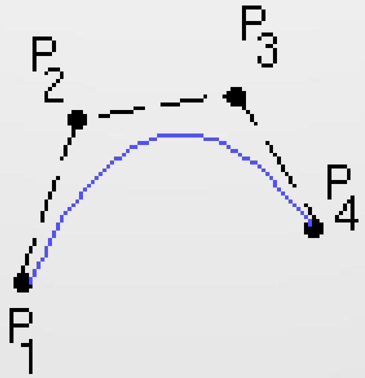


Nhược điểm của Hermite

- Sử dụng điểm và các vector kiểm soát được độ dốc của đường cong tại nhưng điểm mà nó đi qua
- Không được thuận lợi cho việc thiết kế tương tác, không tiếp cận vào các độ dốc của đường cong bằng các giá trị số

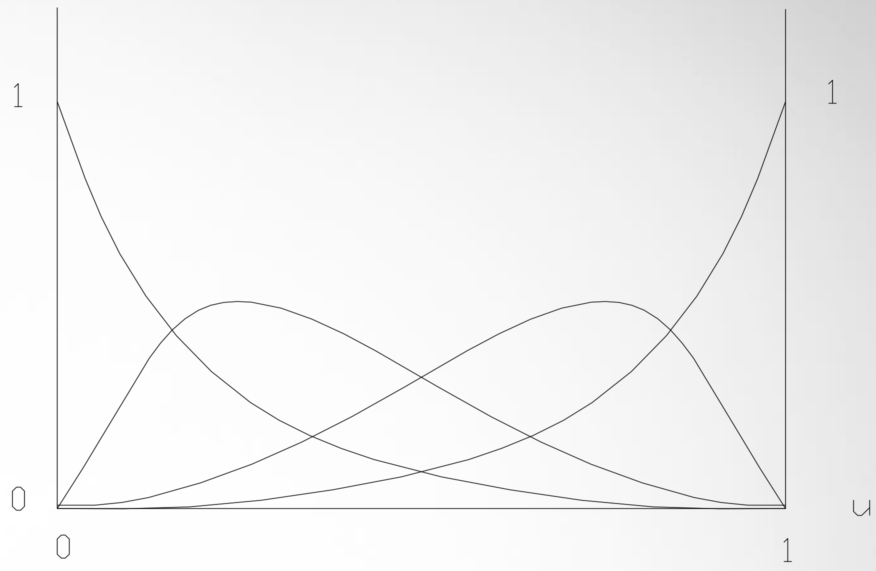
Đường cong Bezier

- *Paul Bezier, RENAULT, 1970, Đường và bề mặt UNISURF*
- Là biến thể của đường cong Hermite
- Mỗi đường cong được điều khiển bởi **4 điểm**



Đường cong Bezier

- p_o, p_3 tương đương với p_0, p_1 trên đường Hermite. diểm trung gian p_1, p_2 được xác định bằng 1/3 theo độ dài của vector tiếp tuyến tại điểm p_o và p_3
- $p_0' = 3(p_1 – p_0)$
- $p_3' = 3(p_3 – p_2)$
- $p = p(u) = p_0(1\text{-}3u^2+2u^3) + p_1(3u^2\text{-}2u^3) + p_0'(u\text{-}2u^2+u^3) + p_1'(\text{-}u^2 + u^3)$
- $p = p(u) = p_0(1 - 3u + 3u^2 - u^3) + p_1(3u\text{-}6u^2+3u^3) + p_2(3u^2 - 3u^3) + p_3u^3$



$$p = p(u) = [\ 1\ u\ u^2\ u^3\ ] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$$

Ưu điểm

- Dễ dàng kiểm soát hình dạng của đường cong hơn vector tiếp tuyến tại p_0' và p_1' của Hermite.
- Nằm trong đa giác kiểm soát với số điểm trung gian tuỳ ý (số bậc tuỳ ý)
- Đi qua điểm đầu và điểm cuối của đa giác kiểm soát, tiếp xúc với cặp hai vector của đầu cuối đó

Biểu thức Bezier-Bernstain

- Tổng quát hoá với n +1 điểm kiểm soát

$$p(u) = \sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(u) p_i$$

$$p'(u) = n \sum_{i=0}^{n} B_{i,n-1}(u)(p_{i+1} - P_i)$$

$$B_{i,n}(u) = C(n,i) u^i (1-u)^{n-i}$$

$$C(n,i) = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

- p_0 ... p_n : vector vị trí của đa giác n+1 đỉnh

Tính chất

- P_0 và P_n nằm trên đường cong.
- Đường cong liên tục và có đạo hàm liên tục tất cả các bậc
- Tiếp tuyến của đường cong tại điểm P_0 là đường P_0P_1 và tại P_n là đường $P_{n-1}P_n$.
- Đường cong nằm trong đường bao lồi convex hull của các điểm kiểm soát.
- P_1, P_2,... ,P_{n-1} nằm trên đường cong khi và chỉ khi đường cong là đoạn thẳng.

4

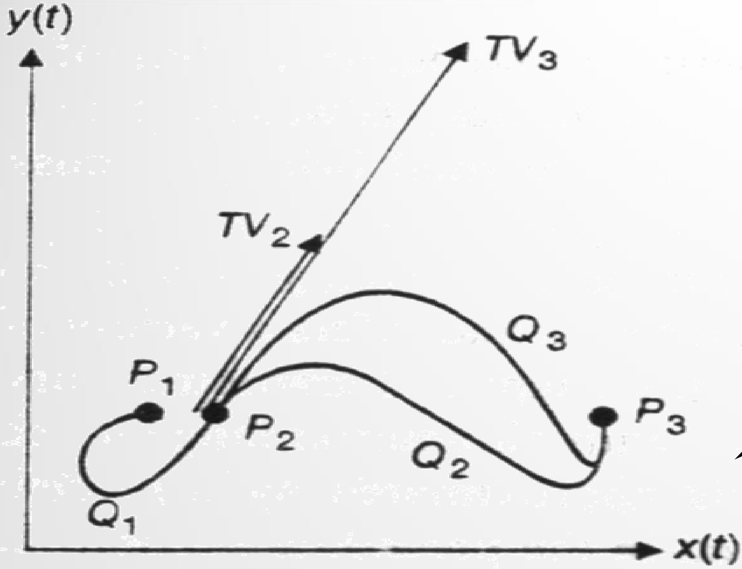
ĐƯỜNG CONG SPLINE

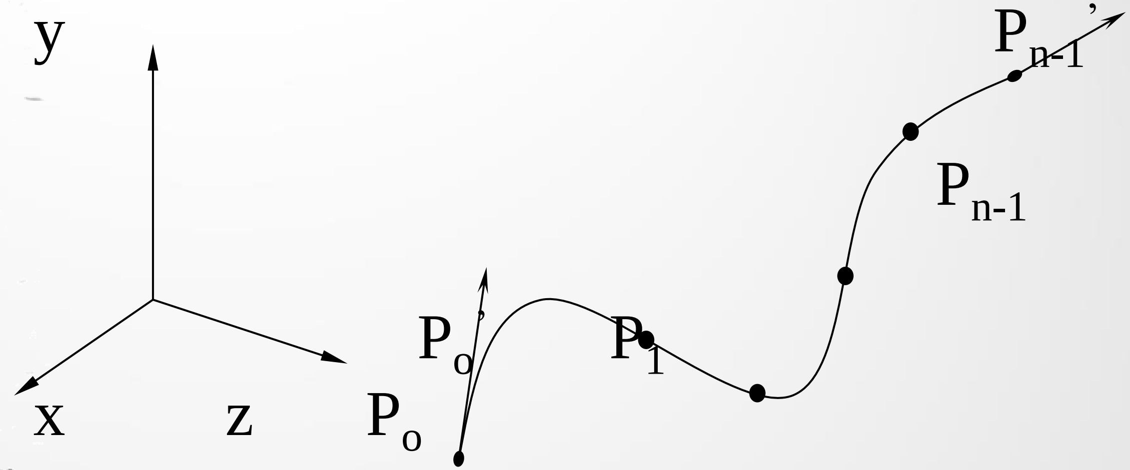
Đường bậc ba Spline

- Spline đi qua n điểm cho trước mà mỗi đoạn là đường bậc ba độc lập có độ dốc và độ cong liên tục tại mỗi điểm kiểm soát hay điểm nút
- Với n điểm:n-1 đoạn với mỗi đoạn 4 vector hệ số 4(n-1) cho n-1 đoạn, và 2(n-1) điều kiện biên và n-2 điều kiện về độ dốc cùng n-2 về độ cong
- Spline dùng để chỉ phương pháp biểu diễn đường cong mềm thông qua các đoạn cong tham biến bậc ba với các điều kiện liên tục tại các điểm đầu nút

Đường bậc ba Spline

- $u_0 = 0$ với : $(u_0 \ldots u_{n-1})$ $u_{j+1} > u_j$
- $u_{i+1} = u_i + d_{i+1}$
- C_0 để không có sự gián đoạn giữa hai đoạn cong.
- C_1 tính liên tục bậc nhất hay đạo hàm bậc nhất tại điểm nối.
- C_2 đạo hàm bậc hai liên tục của đường cong tại điểm nối





$$p = [\,1\ u\ u^2\ \ u^3\,]\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -3 & 3 & -2 & -1\\ 2 & 2 & 1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}p_0\\ p_1\\ p'_0\\ p'_1\end{bmatrix}$$

- Tính liên tục của đạo hàm bậc hai tại các điểm nối có thể dễ dàng đạt được bằng cách đặt P''i_{-1}(ui_{-1}=1) là đạo hàm bậc hai tại điểm cuối của đoạn (i-1) bằng với P''i(ui=0) đạo hàm bậc hai tại điểm đầu của đoạn thứ i.
- P''i_{-1}(1)= P''i(0)

Đường cong B-spline

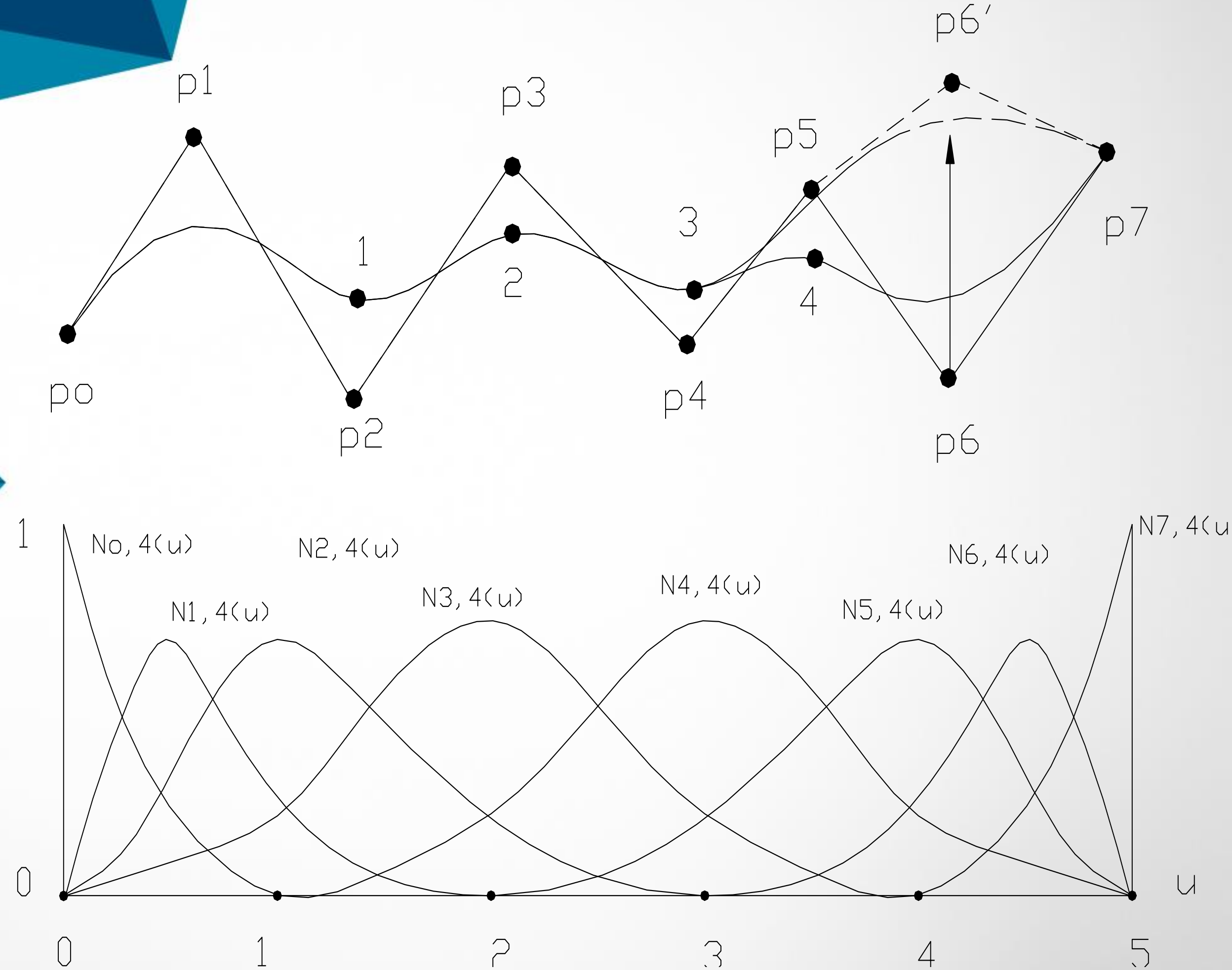
- Đường cong B-spline là đường cong được sinh ra từ đa giác kiểm soát mà bậc của nó không phụ thuộc vào số đỉnh của đa giác kiểm soát.

B-spline

- Ni,k(u) đa thức B-Spline cơ bản
- Với n+1 số điểm kiểm soát
- Pi điểm kiểm soát thứ i
- k bậc của đường cong 1<k<n+2
- Ui vector nút của đường cong U=[U1,U2...Un+k+1]

$$P(u) = \sum_{i=0}^{n} N_{i,k}(u).P_i \qquad N_{i,1}(u) = \begin{cases} 1 & u \in [u_i, u_{i+1}] \\ 0 & \text{others} \end{cases}$$

$$N_{i,k}(u) = \frac{(u - U_{i+1-k})}{U_i - U_{i+1-k}} N_{i-1,k-1}(u) + \frac{(U_{i+1} - u)}{(U_{i+1} - U_{i+2-k})} N_{i,k-1}(u)$$


p6′
p1
p3
p5
1
3
p7
2
4
po
p2
p4
p6
1
No, 4(u)
N2, 4(u)
N7, 4(u)
N6, 4(u)
N1, 4(u)
N3, 4(u)
N4, 4(u)
N5, 4(u)
0
u
0
1
2
3
4
5

Đặc điểm

- B-spline không đi qua hai điểm đầu và cuối trừ khi hàm hợp được dùng là tuyến tính.
- B-spline có thể được tạo qua hai điểm đầu, cuối và tiếp xúc với vector đầu và cuối của đa giác kiểm soát. Bằng cách thêm vào các nút tại vị trí của các nút cuối của vector tuy nhiên các giá trị giống nhau không nhiều hơn bậc của đường cong.
- Tính chất bao lồi của đa giác kiểm soát và tính chất chuẩn được thỏa mãn.

$$\sum_{i=0}^{n} N_{i,k}(u) = 1$$

- Số lượng các nút, bậc của đường cong và số điểm điều khiển luôn có các quan hệ ràng buộc:

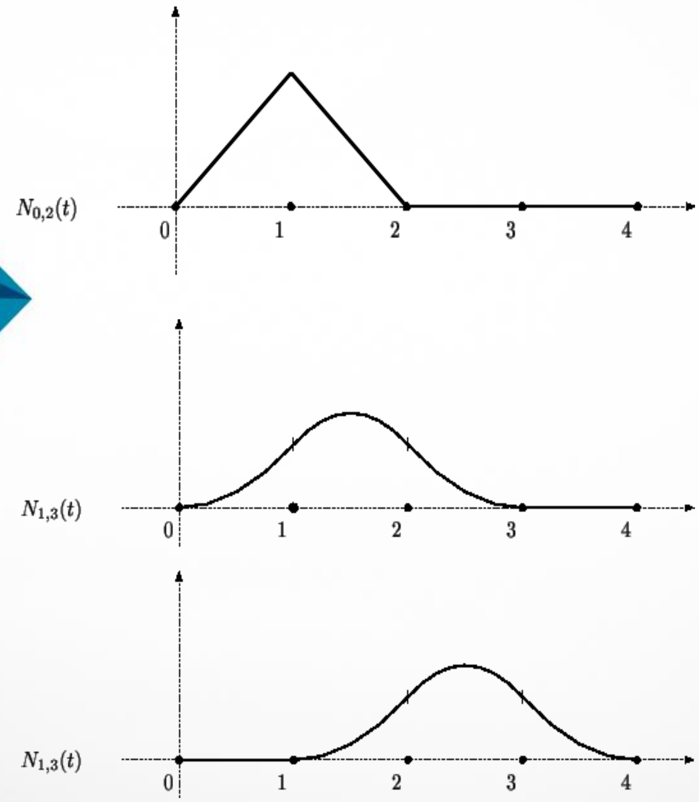
$$0 \le u \le n - k + 2$$

B-spline đều và tuần hoàn

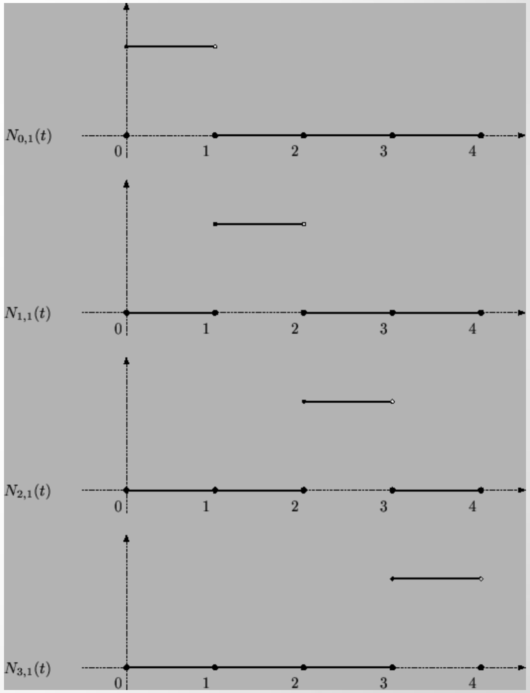
- Vecto nút là đều khi giá trị của chúng cách đều nhau một khoảng ∇ xác định. Trong các bài toán thực tế, vecto nút đều được bắt đầu từ 0 và tăng 1 cho đến giá trị lớn nhất
  - Ví dụ: [0 1 2 3 4 5] với ∇ xác định = 1
  - [-2 -1/2 1 5/2 4] với ∇ xác định = 3/2

- Với cấp là k, số điểm kiểm soát là n+1 thì vecto nút đều là
  - U=[0 1 2 ...n+k] khoảng tham số (k-1)≤u≤(n+1).
- Khi vecto nút là đều thì ta có Ni,k(u)=Ni-1,k(u-1)=Ni+1,k(u+1)

VÍ DỤ



$N_{0,2}(t)$
0
1
2
3
4
$N_{1,3}(t)$
0
1
2
3
4
$N_{1,3}(t)$
0
1
2
3
4



$N_{0,1}(t)$
0
1
2
3
4
$N_{1,1}(t)$
0
1
2
3
4
$N_{2,1}(t)$
0
1
2
3
4
$N_{3,1}(t)$
0
1
2
3
4

Không tuần hoàn

- Một vector không tuần hoàn hoặc mở (open – non uniform) là vector nút có giá trị nút tại các điểm đầu cuối lặp lại với số lượng các giá trị lặp lại này bằng chính cấp k của đường cong và các giá trị nút trong mỗi điểm lặp này là bằng nhau
- Nếu một trong hai điều kiện này hoặc cả hai điều kiện không được thoả mãn thì vecto nút là không đều.
- Cách tính Ui
  - Ui = 0 $\quad$ 1=<i<=k
  - Ui = i-k $\quad$ k+1<i<=n+1
  - Ui = n-k+2 $\quad$ n+1<i<=n+k+1

Cấp k	số lượng nút (m = n + k)	Vector nút không tuần hoàn
2	6	[0 0 1 2 3 3]
3	7	[0 0 0 1 2 2 2]
4	8	[0 0 0 0 1 1 1 1]

B-spline

- B-spline là một dòng của Bezier
  - Thực tế khi ta chọn bậc k cho tập hợp k điểm thì thi B-spline chuyển thành Bezier
- Khi bậc của đa thức giảm sự ảnh hưởng cục bộ của mỗi điểm nút càng rõ ràng hơn.
- Khi tồn tại anh hưởng cục bộ càng lớn và đường cong phai đi qua điểm đó.
- Chúng ta có thể thay đổi hình dạng đường cong B-spline bằng cách:
  - Thay đổi kiểu vecto nút: đều tuần hoàn, mở, không đều
  - Thay đổi cấp k của đường cong
  - Thay đổi số đỉnh và vị trí các đỉnh đa giác kiểm soát
  - Sử dụng các điểm kiểm soát trùng nhau