



Bài 5

CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI MÔ HÌNH



NỘI DUNG

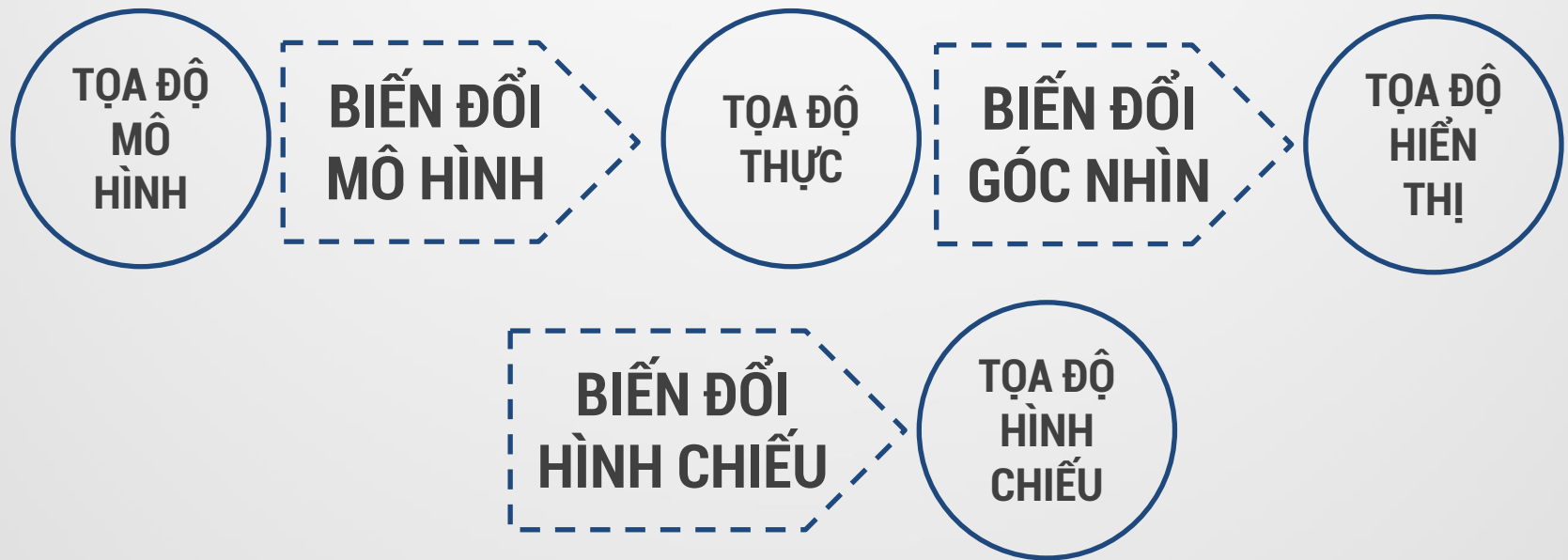
1. Tổng quan
2. Các phép biến đổi hình học hai chiều
3. Ma trận đồng nhất
4. Các phép biến đổi hình học ba chiều



1

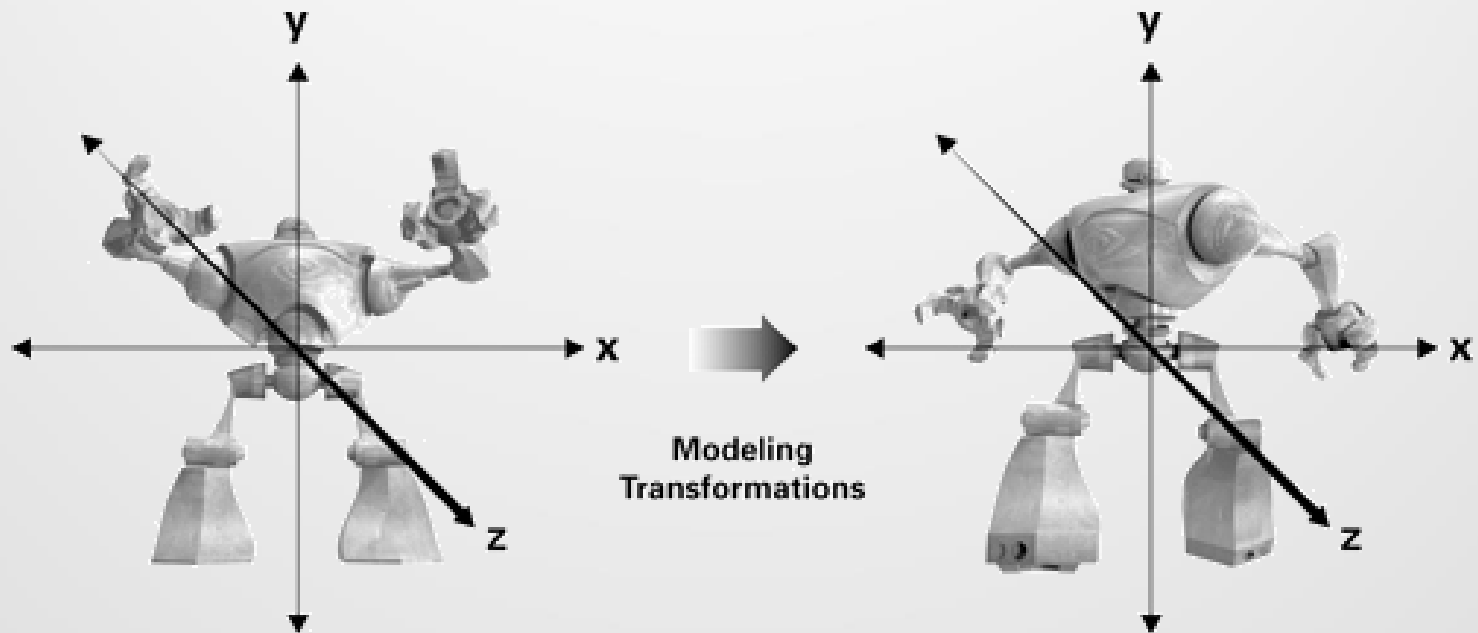
TỔNG QUAN

Tổng quan



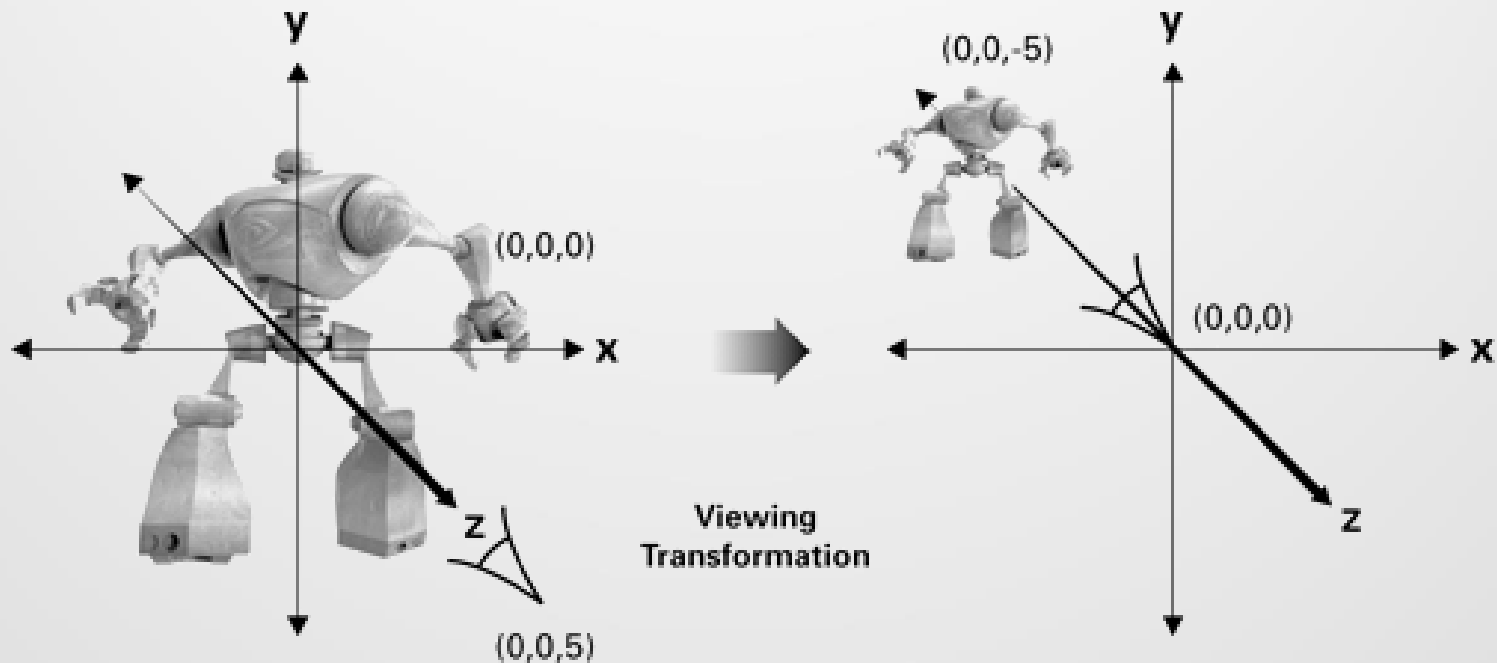
Tổng quan

- Biến đổi mô hình (Modeling Transformation)



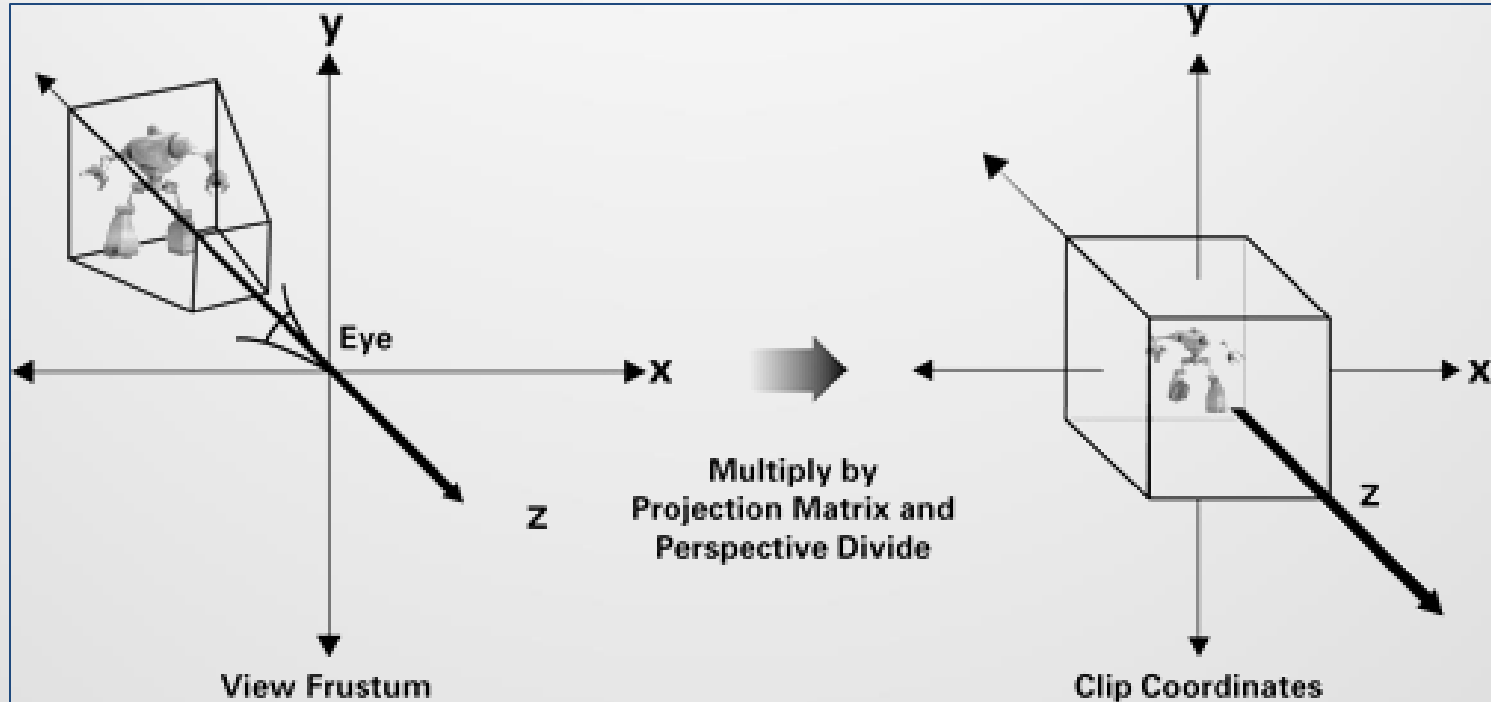
Tổng quan

- Biến đổi góc nhìn (Viewing Transformation)



Tổng quan

- Biến đổi hình chiếu (Projection Transformation)



Định nghĩa

- Các phép biến đổi (Transformation)

Là các phép ánh xạ tọa độ điểm hay vector thành tọa độ hay vector khác

Phép biến đổi Affine

- Phép biến đổi Affine là phép biến đổi tọa độ điểm đặc trưng của đối tượng thành tập tương ứng các điểm mới để tạo ra các hiệu ứng cho toàn đối tượng.
 - Ví dụ: phép biến đổi tọa độ với chỉ 2 điểm đầu cuối của đoạn thẳng tạo thành 2 điểm mới mà khi nối chúng với nhau tạo thành đoạn thẳng mới.
 - Các điểm nằm trên đoạn thẳng sẽ có kết quả là điểm nằm trên đoạn thẳng mới với cùng phép biến đổi thông qua phép nội suy.

Phép biến đổi Affine

Các thuộc tính

- Bảo toàn đoạn thẳng
 - Các đoạn thẳng được bảo toàn, do đó ảnh xạ của một đoạn thẳng vẫn là một đoạn thẳng
 - Đơn giản hóa quá trình vẽ đoạn thẳng. Chúng ta chỉ cần xác định ảnh xạ của hai điểm đầu cuối của đoạn thẳng và vẽ một đường thẳng nối hai điểm đó lại
 - Bảo đảm sự thẳng hàng, do đó các đa giác sẽ biến đổi thành các đa giác

Phép biến đổi Affine

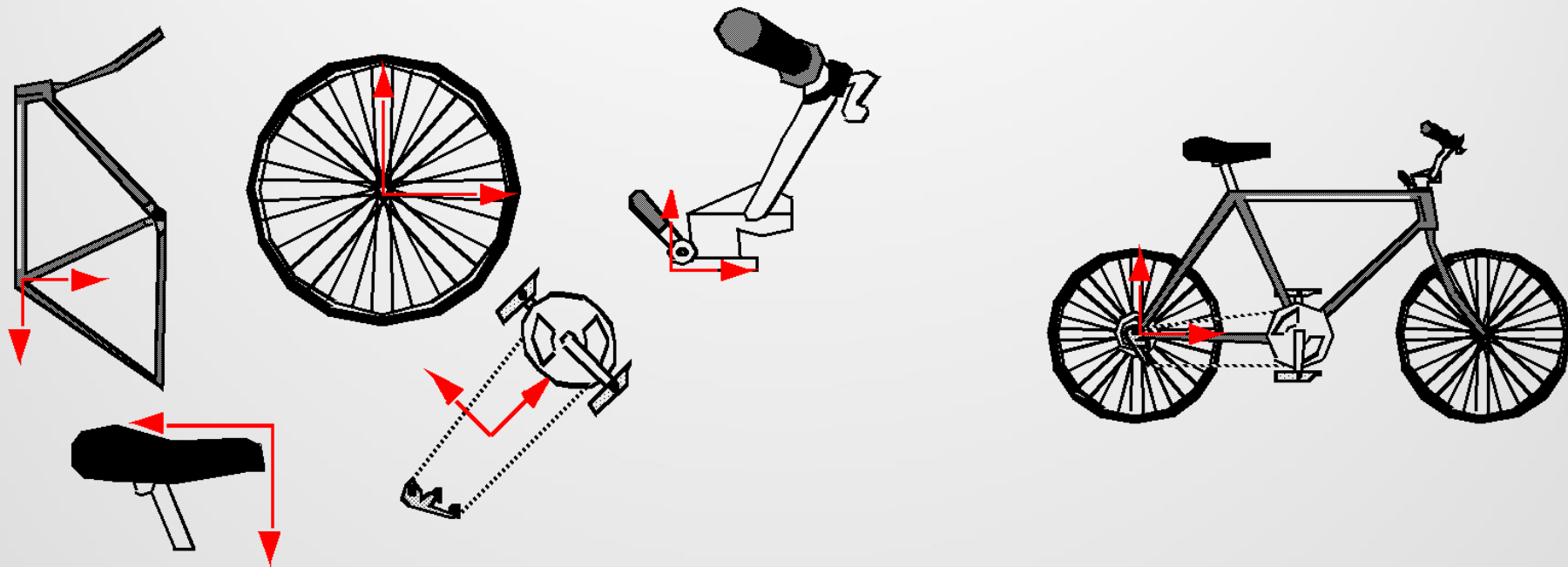
- **Bảo toàn tính song song**
 - Các đoạn thẳng song song sẽ biến đổi thành các đoạn thẳng song song
 - Ví dụ: Hình bình hành sẽ biến đổi thành hình bình hành
- **Bảo toàn các khoảng cách tỉ lệ**
 - Các tỉ lệ sẽ được bảo toàn. Ví dụ: Trung điểm của đoạn thẳng sau khi biến đổi sẽ là trung điểm của đoạn thẳng mới

Phép biến đổi Affine

- Mọi phép biến đổi phức tạp đều có thể tạo thành từ các phép biến đổi cơ sở như:
 - Dịch chuyển (Translation)
 - Tỷ lệ (Scaling)
 - Quay (Rotation)
 - Biến dạng (Shearing)

VÍ DỤ

world



2

CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI 2 CHIỀU

Biểu diễn ma trận

- Việc biến đổi các đối tượng làm thay đổi các điểm P thành các điểm Q theo thuật toán
- Việc biến đổi P sử dụng tọa độ của P (P_x, P_y) ánh xạ thành các tọa độ mới Q (Q_x, Q_y)
- Việc biến đổi có thể biểu diễn thông qua hàm T, hàm ánh xạ của điểm:

$$T(P_x, P_y) = (Q_x, Q_y)$$

hoặc

$$T(P) = Q$$

Biểu diễn ma trận

- Phép biến đổi đồ họa Afin (Affine transformation) T ánh xạ tập P sang tập Q :

$$Q_x = aP_x + bP_y + t_x$$

$$Q_y = cP_x + dP_y + t_y$$

– với a, b, c, d, t_x and t_y là các hệ số

- Biểu diễn ma trận:

$$\begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix}$$

hay

$$Q = MP + Tr$$

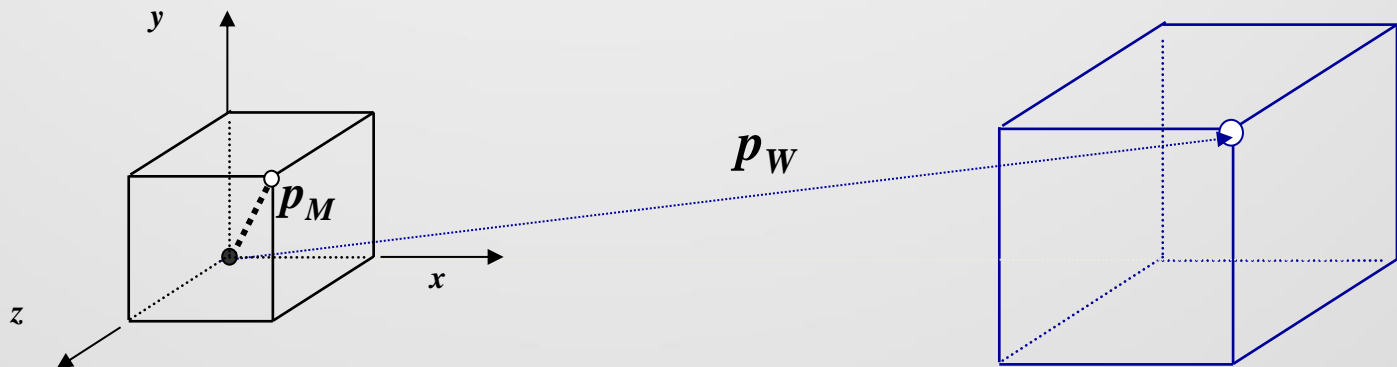
Biểu diễn ma trận

- Phương pháp biểu diễn đối tượng $P = [x \ y]$
- Phép biến đổi vị trí điểm

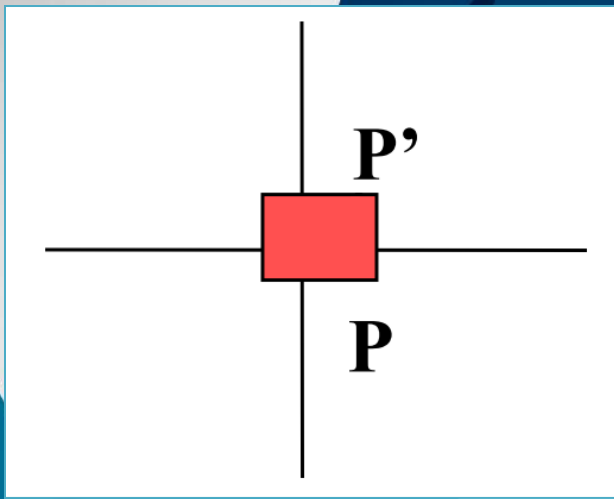
$$T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

- Thực thi phép biến đổi đúng trên 1 điểm ảnh sẽ đúng trên toàn bộ đối tượng

$$[P] * [T] = [x \ y] * \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = [(ax + cy) \ (bx + dy)] = [x' \ y']$$



PHÉP BẤT BIẾN



- Phép bất biến

$$x' = x$$

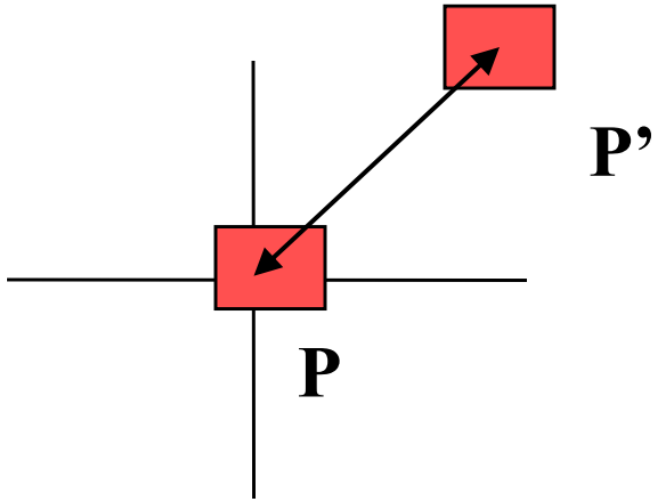
$$y' = y$$

- Ma trận biến đổi của phép bất biến

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[P] * [T] = [x \ y] * \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [(1x + 0y) \ (0x + 1y)] = [x' \ y']$$

PHÉP TỊNH TIẾN



- Phép tịnh tiến (Translate)

$$x' = x + a$$

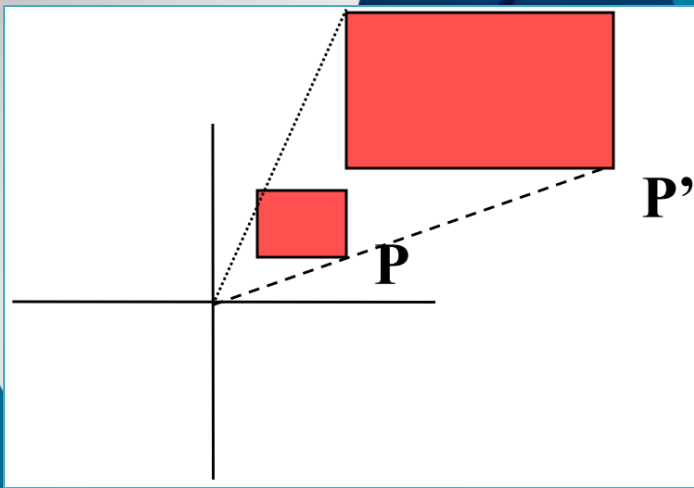
$$y' = y + b$$

- Ma trận dịch chuyển

$$Tr = [a \quad b]$$

$$[P] + [Tr] = [x \quad y] + [a \quad b] = [x' \quad y']$$

PHÉP TỈ LỆ



- Phép tỉ lệ (Scale)

$$x' = a*x$$

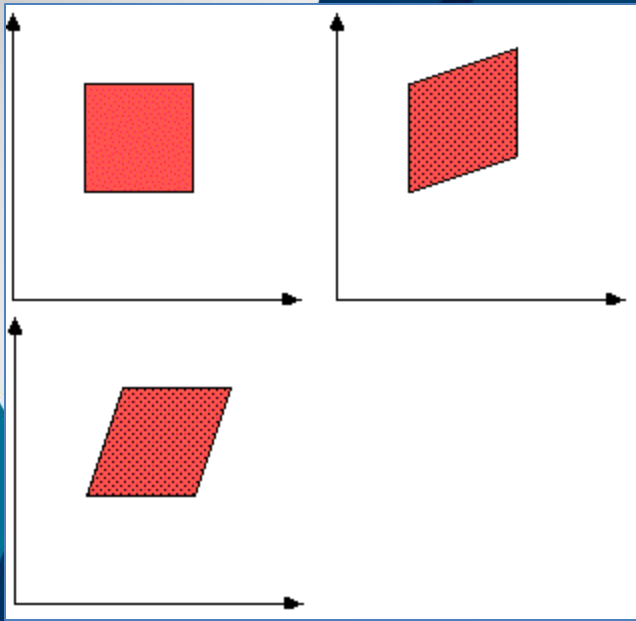
$$y' = b*y$$

- Ma trận biến đổi của phép tỉ lệ

$$T = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

$$[P] * [T] = [x \ y] * \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = [(ax + 0y) \ (0x + by)] = [x' \ y']$$

PHÉP BIẾN DẠNG



- Phép biến dạng (Shear)

Theo chiều x

$$x' = x + ay$$

$$y' = y$$

Theo chiều y

$$x' = x$$

$$y' = y + bx$$

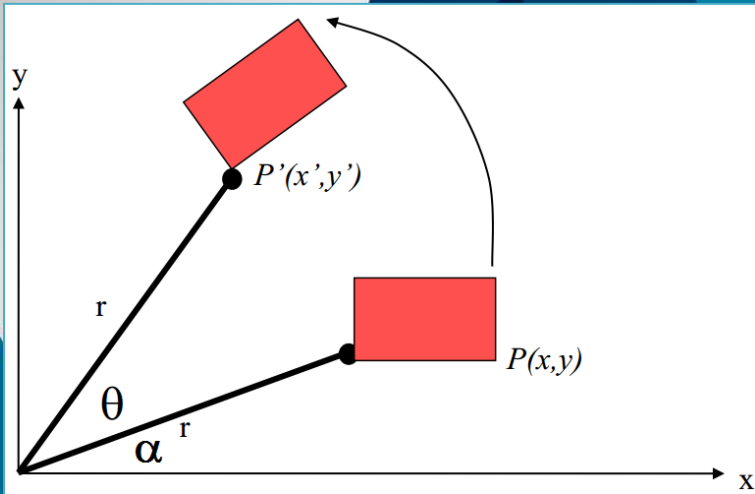
- Ma trận biến dạng

Trục x: $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}$

Trục y: $T = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$[P] * [T] = [x \ y] * \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [(1x + 0y) \ (bx + 1y)] = [x' \ y']$$

PHÉP XOAY



$$x = r \cos \alpha, y = r \sin \alpha$$

$$x' = r \cos (\theta + \alpha), y' = r \sin (\theta + \alpha)$$

$$\begin{aligned} x' &= r (\cos \theta \cos \alpha - \sin \theta \sin \alpha) \\ &= x \cos \theta - y \sin \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y' &= r (\sin \theta \cos \alpha + \cos \theta \sin \alpha) \\ &= x \sin \theta + y \cos \theta \end{aligned}$$

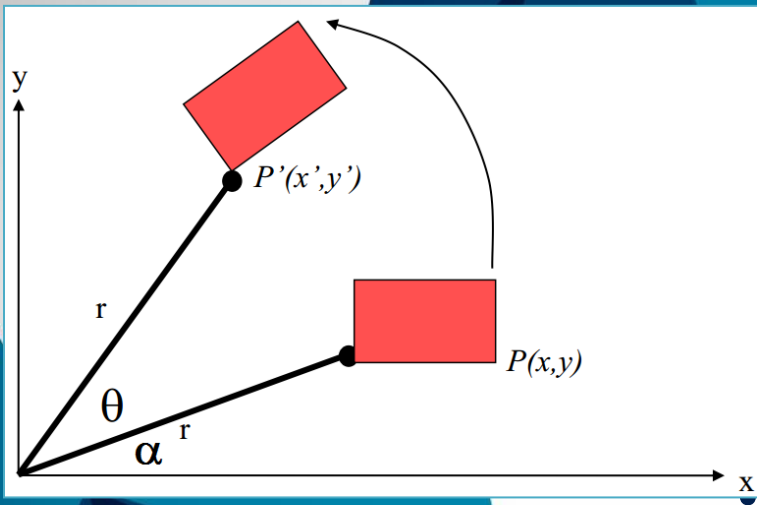
$$[x' \ y'] = [x \cos \theta - y \sin \theta \quad x \sin \theta + y \cos \theta]$$

- Phép xoay (Rotate)

$$x' = x \cos \theta - y \sin \theta$$

$$y' = x \sin \theta + y \cos \theta$$

PHÉP XOAY



Ma trận biến đổi của phép bất biến

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

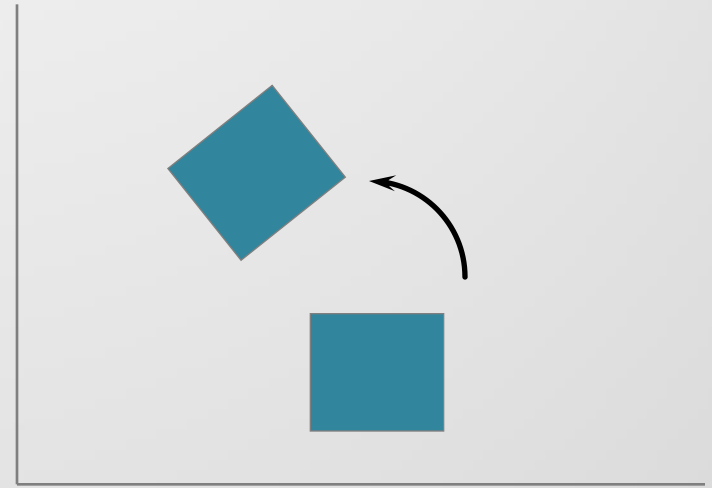
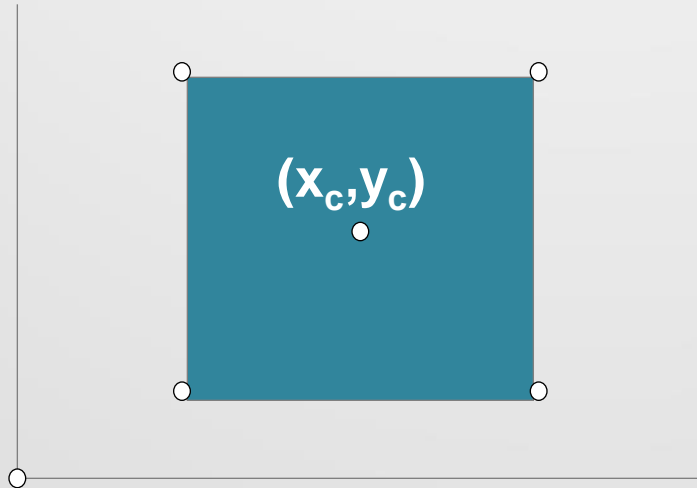
$$[P] * [T] = [x \ y] * \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \\ [(x.\cos \theta - y.\sin \theta) \ (x.\sin \theta + y.\cos \theta)] = [x' \ y']$$

Phép biến đổi tổng hợp

- Thông thường chúng ta cần phải thực hiện một phép biến đổi phức tạp từ nhiều phép biến đổi cơ bản
 - Ví dụ: Đồng thời tịnh tiến một đối tượng, xoay và thay đổi tỉ lệ
- Phép biến đổi này gọi là phép biến đổi tổ hợp
- Tổ hợp của 2 hay nhiều các phép biến đổi affine cũng là một phép biến đổi affine

Phép biến đổi tổng hợp

- Phép xoay quanh một điểm gốc (pivotal point)
 - Thực hiện phép tịnh tiến tất cả các điểm theo vector $(-x_c, -y_c)$
 - Xoay quanh gốc trục tọa độ
 - Thực hiện phép tịnh tiến tất cả các điểm về vị trí ban đầu theo vector (x_c, y_c)



Phép biến đổi tổng hợp

- Vấn đề gặp phải
 - Các biến đổi affine được thực hiện bằng các phép biến đổi tuyến tính, sau đó là phép tịnh tiến
 - Tuy nhiên, phép tịnh tiến được thực hiện bằng một phép cộng thay vì một phép nhân ma trận
 - Cần tìm cách thực hiện các phép biến đổi bằng cách chỉ cần nhân các ma trận lại với nhau

3

HỆ TỌA ĐỘ ĐỒNG NHẤT

TỌA ĐỘ ĐỒNG NHẤT

Tọa độ đồng nhất (Homogeneous Transform)

- Phương pháp biểu diễn mở rộng thông qua tọa độ đồng nhất của các vector vị trí
 - Với ứng dụng của phép chiếu hình học mà ở đó tọa độ điểm được mô tả dưới ma trận $[x^* \ y^* \ h]$
 - với $x = x^*/h$, $y = y^*/h$, $z = z^*/h$ và h là một số thực tùy ý
-

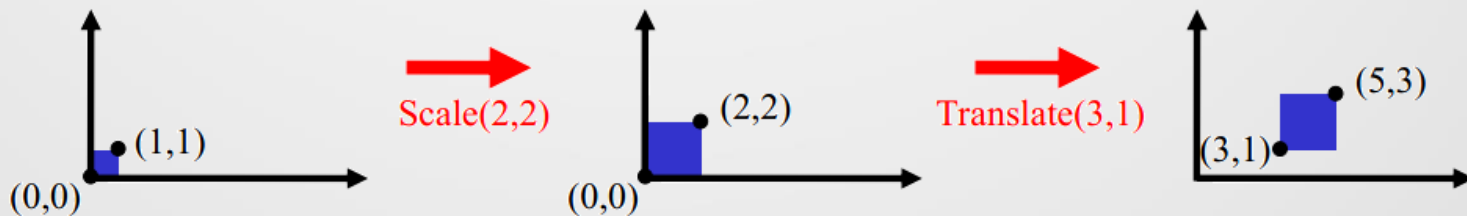
TỌA ĐỘ ĐỒNG NHẤT

- Đưa ra cái nhìn hợp nhất của các phép biến đổi dưới phép nhân ma trận, hỗ trợ cho việc xử lý bằng cả phần cứng và phần mềm
 - Cho phép kết hợp với cả các phép biến đổi đặc biệt không tuyến tính khác (non-affine) như:
 - Phép chiếu phối cảnh (Perspective projections)
 - Uốn (bends), vuốt (tapers)...
-

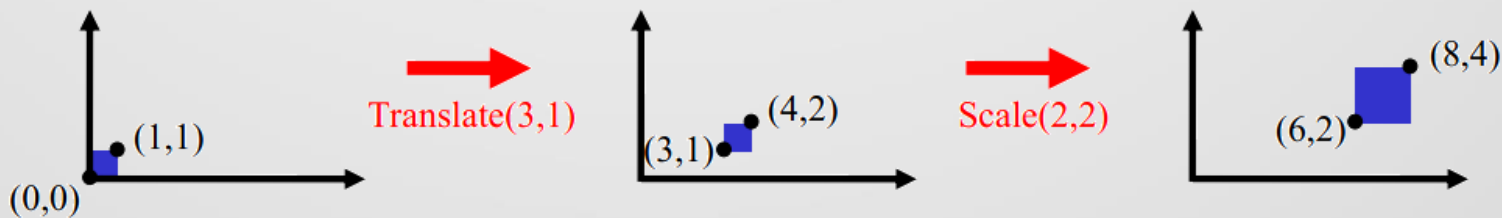
Tọa độ đồng nhất

- Kết hợp các phép biến đổi tạo thành ma trận tích đơn giản duy nhất. Tránh nhầm lẫn về thứ tự của các phép nhân khi sử dụng.
 - Chú ý khi nhân ma trận: AB cho kết quả khác BA
 - Ví dụ:

1. Scale \rightarrow Translate



2. Translate \rightarrow Scale

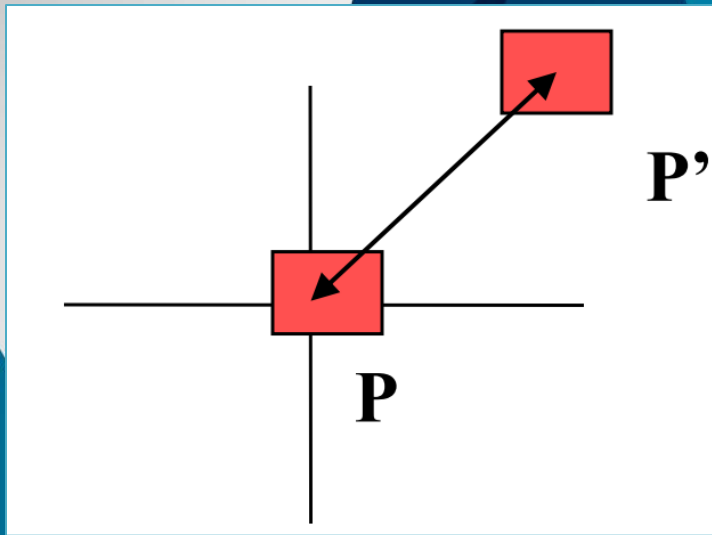


Ma trận đồng nhất

- Ma trận biến đổi đồng nhất

$$[T] = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ m & n & 1 \end{bmatrix}$$

PHÉP TỊNH TIẾN

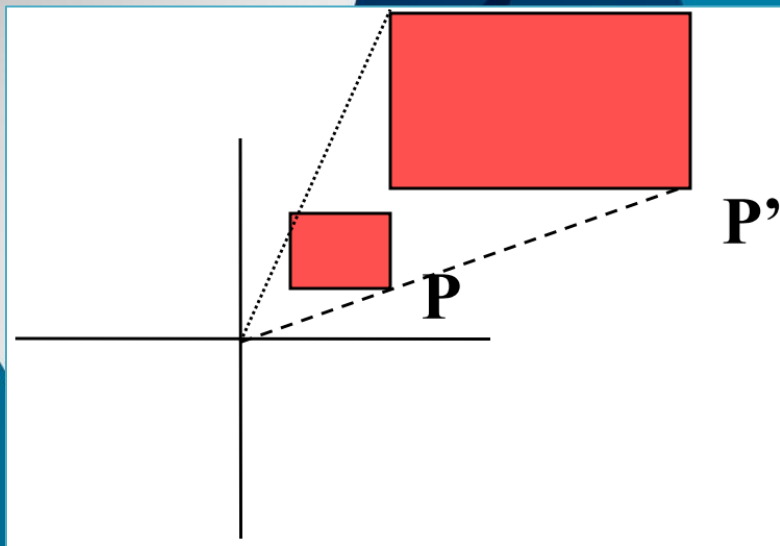


- Ma trận đồng nhất

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & n & 1 \end{bmatrix}$$

$$[x' \quad y' \quad 1] = [x \quad y \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & n & 1 \end{bmatrix} = [x+m \quad y+n \quad 1]$$

PHÉP TỈ LỆ

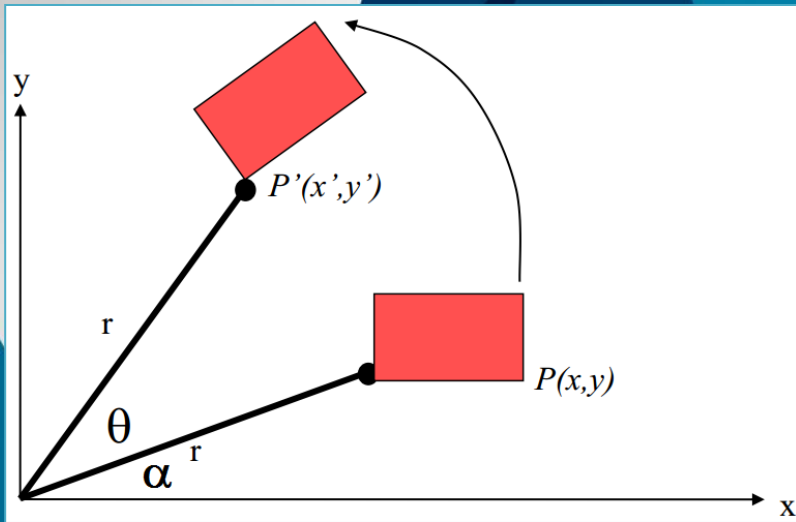


- Ma trận đồng nhất

$$[T] = \begin{bmatrix} S1 & 0 & 0 \\ 0 & S2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[x' \quad y' \quad 1] = [x \quad y \quad 1] \begin{bmatrix} S1 & 0 & 0 \\ 0 & S2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [x.S1 \quad y.S2 \quad 1]$$

PHÉP XOAY



- Ma trận đồng nhất

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} [x' \quad y' \quad 1] &= [x \quad y \quad 1] \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= [x \cdot \cos \phi - y \cdot \sin \phi \quad x \cdot \sin \phi + y \cdot \cos \phi \quad 1] \end{aligned}$$

4

CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI 3 CHIỀU

BIẾN ĐỔI TRONG KHÔNG GIAN BA CHIỀU

- Biểu diễn điểm trong không gian 3 chiều

$$- [x^* \ y^* \ z^* \ h] = [x \ y \ z \ 1] \cdot [T]$$

$$- [x' \ y' \ z' \ 1] = [x^*/h \ y^*/h \ z^*/h \ 1] \begin{bmatrix} T \\ \end{bmatrix}$$

- Ma trận biến đổi

$$[T] = \begin{bmatrix} a & b & c & p \\ d & e & f & q \\ g & i & j & r \\ 1 & m & n & s \end{bmatrix}$$

PHÉP TÍNH TIẾN

- Ma trận đồng nhất

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ dx & dy & dz & 1 \end{bmatrix}$$

PHÉP TỈ LỆ

- Ma trận đồng nhất

$$[T] = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

PHÉP BIẾN DẠNG

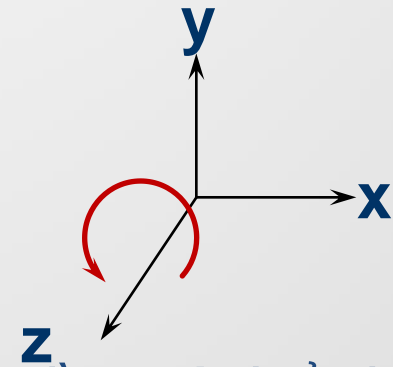
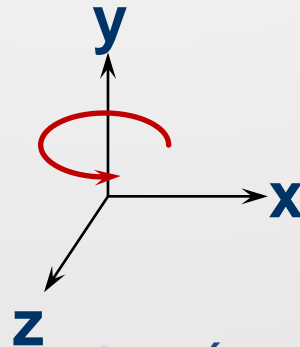
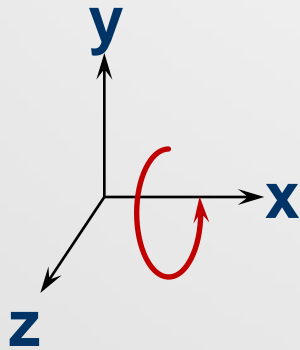
- Ma trận đồng nhất

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & b & c & 0 \\ d & 1 & f & 0 \\ g & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[x' \quad y' \quad z' \quad 1] = [x + yd + gz \quad bx + y + iz \quad cx + fy + z \quad 1]$$

Phép xoay

- Trong 2D, phép xoay chỉ được thực hiện xung quanh gốc tọa độ
- Trong 3D, một đối tượng có thể xoay theo 3 trục: trục x, trục y, trục z
- Xoay theo chiều dương là ngược chiều kim đồng hồ và xoay theo chiều âm là theo chiều kim đồng hồ



«Mọi phép xoay xung quanh gốc tọa độ đều có thể chia thành phép quay quanh trục x, sau đó quay quanh trục y và sau đó quay quanh trục z»

– Định lý Euler

PHÉP XOAY

- Ma trận đồng nhất
 - Theo trục x

$$[Tx] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

PHÉP XOAY

– Theo trục y

$$[T_y] = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

– Theo trục z

$$[T_z] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Phép xoay

– Theo trục (u_x, u_y, u_z) bất kỳ

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x u_x (1-c) + c & u_z u_x (1-c) - u_z s & u_x u_z (1-c) + u_y s & 0 \\ u_y u_x (1-c) + u_z s & u_z u_x (1-c) + c & u_y u_z (1-c) - u_x s & 0 \\ u_z u_x (1-c) - u_y s & u_y u_z (1-c) + u_x s & u_z u_z (1-c) + c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

với

- $c = \cos \theta$
- $s = \sin \theta$

